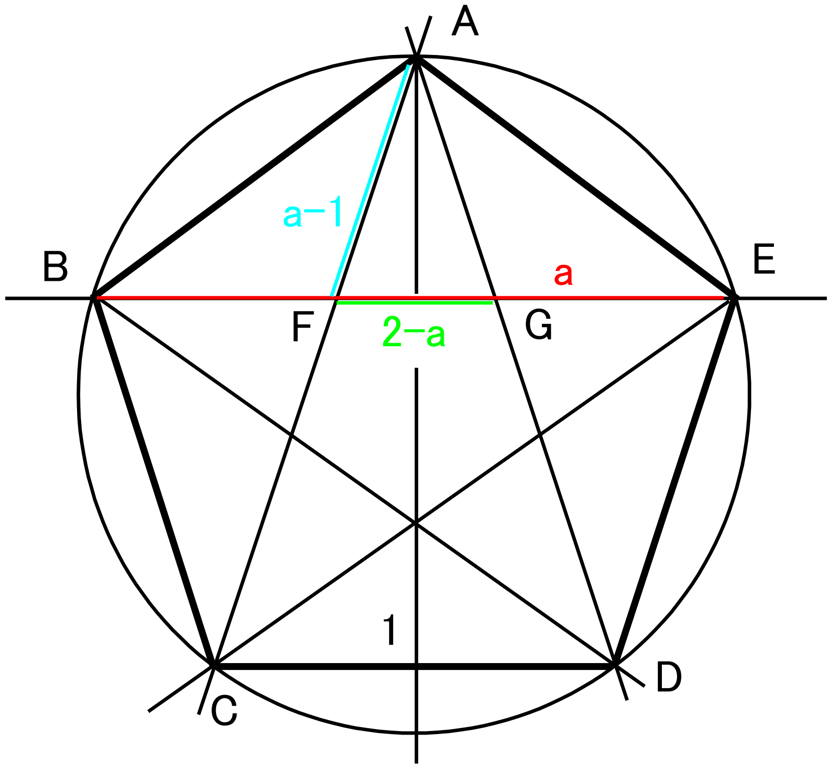
§9. 何故星型は美しいのか（正五角形は黄金比だらけ）

正五角形を外接する円とともに示すと図のようになります。全ての対角線を引けばきれいな星型になります。正五角形（星型）が何故美しいのか、それを数学的に解明しようと思います。



正五角形 ABCDE において、BE と AC、AD との交点をそれぞれ F、G とします。BE と CD が平行であること、三つの線分 BF と GE、さらに AF の長さが等しいことは自明でしょう。自明というのは数学でよく使う用語で、証明しようと思えばもちろん簡単にできるが、ほとんどの人が直ちに認められるだろうから、ここは証明を省略して使ってしまおうといった内容のことです。

正五角形の一辺の長さ CD を 1 とし、線分 BE（赤色）の長さを a とします。線分 FE の長さは CD に等しいので 1 です（四角形 FCDE は平行四辺形であり、CD＝DE なのでひし形）。
BE＝BF＋FE ですが、BE=a、FE=1 なので、BF＝a－1。従って、AF=a－1（水色）です。さらに、FG＝BE－2×BF＝a－2(a－1)＝2－a（緑色）。また、ΔAFG とΔACD は相似です。従って、AF：FG＝AC：CD。よって、

$(a-1):(2-a)=a:1$ ･･･ ①

$(a-1)\times 1=(2-a)\times a$

$a^2-a-1=0$ ･･･ ②

これを解いて、

$a=(1\pm\sqrt{5})/2$

a は正の数なので、

$a=(1+\sqrt{5})/2$ ・・・ ③

これは、§8 で取り上げた「黄金比」です。自然界にしばしば登場する黄金比が正五角形に関係していることが分かりました。

注）単に a の値を求めるだけならば、$\Delta FAB \backsim \Delta ABE$ から求める方が早い。

$FA:AB=AB:BE$ より、

$AB^2=AF \cdot BE$

$1=(a-1)a$

$a^2-a-1=0$

黄金比の a が絡む式は、具体的な数値 $(1+\sqrt{5})/2$ を持ち出さなくても計算が出来ることが多いです。②より、

$a^2=a+1$

$a=1+1/a$ （$a-1=1/a$ 、$a=1/(a-1)$ ） ・・・ ④

これらを用いると次のような計算が簡単にできます。図において、E→B→A→F→G とたどりつつ二辺の比の値を計算すると、

$EB/BA=a/1=a$

$BA/AF=1/(a-1)=a$

$AF/FG=(a-1)/(2-a)=(a-1)/\{1-(a-1)\}=a(a-1)/\{a-a(a-1)\}=1/(a-1)=a$

（実は最後の AF/FG は①より直ちに a）

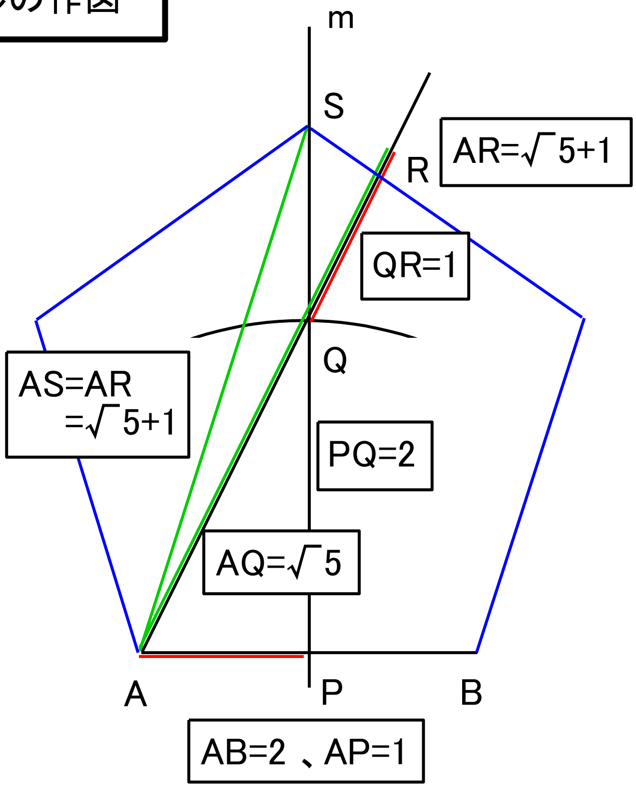
と出来ます。

さらに、$BA/FG=a^2$ （つまり、元の正五角形と中にできた小さな正五角形の辺の長さの比は a^2）、$EB/FG=a^3$ になっています。正五角形は黄金比だらけです。それ故正五角形、そしてそれをもとに描ける星型は美しいのでしょう。

今までの話から正五角形の作図の仕方が分かります。余談ですが、古代ギリシャ時代のある数学を研究するグループは、正五角形を作図する方法を見出したことを誇りとして、星型のバッジを胸に着けていた、とのことです（真偽のほどは何とも言えませんが）。

それでは作図する方法です。対角線の長さは一辺の $(1+\sqrt{5})/2$ ですが、以下の話で分数を避けるために、一辺を 2 とします。すると対角線は $1+\sqrt{5}$ です。図において、まず線分 AB（これが正五角形の一辺となる）に垂直二等分線を立てます。AB の中点（P とする）を中心に半径 AB の弧を描き、垂直二等分線との交点を Q とします。AP＝1 で PQ＝2 だから、ピタゴラスの定理により、$AQ=\sqrt{(2^2+1^2)}=\sqrt{5}$ になります。次に、直線 AQ をい引いて、その直線状に QR＝1 となる点 R をとります。$AR=1+\sqrt{5}$ です。直線 AQ 上に AS＝AR となる点 S をとります。$AS=AR=1+\sqrt{5}$ であることから、線分 AS が対角線になることが分かります。あとは、A、S から等距離 2 である点と、B、S から等距離 2 である点を作図すれば、正五角形の全ての点が求められたことになります。

正五角形の作図



ところで、この正五角形の各辺に同じ正五角形 5 個をそれぞれ辺が一致するように貼り合わせ、元の五角形を底辺にして周りの貼り合わせた 5 個の五角形を斜め上方に折り曲げ、それぞれ隣り合った辺同士を貼り合わせると、縁が波打った器状になります。これと同じものをもう一つ作って、二つの器を凹凸がかみ合うように貼り居合わせると球状の立体が出来ます。これが§7 に登場した正十二面体に他なりません。余段になりますが、この方法で布か何かでサッカーボールのような球を作ることができます。