§8. 自然界の神秘を数学的に解明する（フィボナッチの数列）

「黄金比」ということに関してはご存知の方も多いでしょう。「黄金分割」という言われ方もします。黄金比とは、「絵画や建造物の世界で、縦と横の長さの関係や、何かを配置する際の位置の関係で用いられる比の値のことで、見た目に一番自然で美しく感じられると言われる」ものです。ある一時期ははがきがこのサイズであったということです。ここでは、黄金比がどのようにして導かれるのか、どういう値なのかを説明します。結果として出てくる黄金比は非常に話題性豊かですが、その過程において登場する数列も非常に興味深いものです。

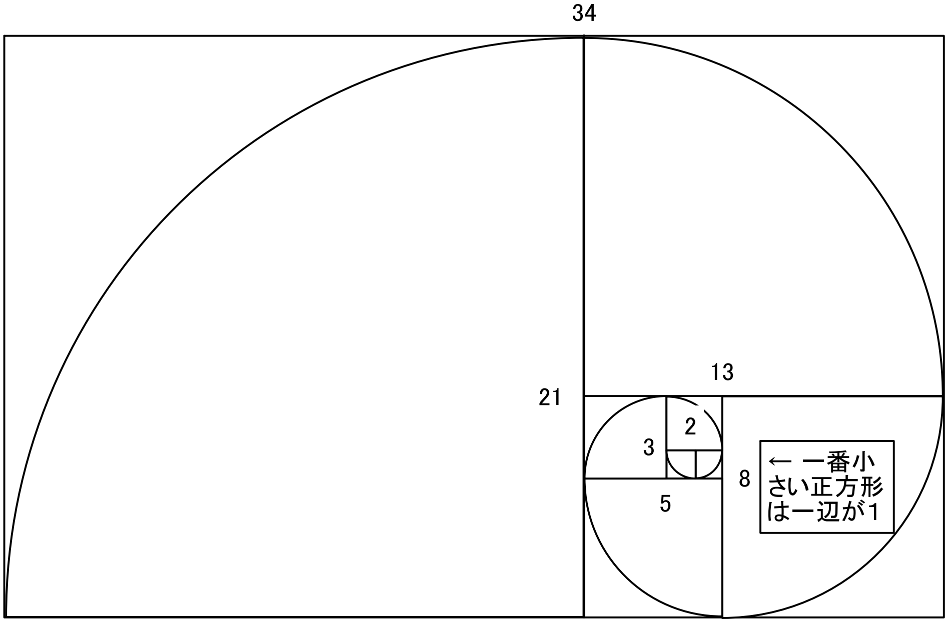
いきなりですが、次のような数列（ある規則性にのっとって並んだ数の列のことを数列という。一般には、並びに制限はなく無限に続いていることが多い）を取り上げます。

1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、・・・

初めてお目にかかるという人もいるかも知れませんが、どのような規則で並んでいるかはすぐに分かります。1、1 から始まり、それ以降は隣り合った 2 つの数の和が次の数になっています。2＝1＋1、3＝1＋2、5＝2＋3、8＝3+5、・・・、といった調子です。この操作はいくらでも続けられるので数の列は無限に並びます。いたって単純な規則で出来ている数列ですが、この数列からはいろいろな興味深い話が、そして黄金比と言われる非常に意味のある数値が導かれるのです。

上の数列はフィボナッチの数列と言います。フィボナッチ（イタリア、1170 頃～1240 頃）という数学者が考案したものです。不思議なことに、この数列に現れる数が自然界のいろいろなところに登場するということが知られています。Net で調べればいくらでも例を見つけられるでしょう。

例）最も良く知られた代表的な例です。図のように正方形を並べ円弧をえがいていくと



渦巻ができますが、オウム貝そっくりの形になります。

さて、フィボナッチの数列から黄金比を導く話を進めていきます。式の変形等、多少数学的な知識を必要とする場面もありますが、できるだけ分かり易く説明しながら進めていきます。

まず、いくつか用語の約束とその意味についてです。数列の一つひとつの数を項という言い方をします。一番目の数は第一項（初項ということもある）、二番目が第二項、三番目が第三項、･･･です。一般に、第n番目の項は第n項といって、nを使って表されますが、この項のことを一般項という言い方をすることもあります。具体的な例で見てみましょう。

例えば、数列

1、3、5、7、9、･･･

において、初項は1、第二項は3、第三項は5、･･･です。さて、第n項がどうなるか考えてみましょう。この数列はすぐに分かるように、1から始まって奇数が並んでいます。

第1項	第2項	第3項	第4項	
$1=2\times1-1$、	$3=2\times2-1$、	$5=2\times3-1$、	$7=2\times4-1$、	･･･

と考えると分かるように、2×○－1の○が第○項の数に一致しています。従って、第n項は $2n-1$（$n\geqq1$）と表せることになります。逆に、この第n項のnに数を代入すれば、任意の項の数を具体的に求めることができます。例えば第13項はnに13を代入して、

第13項：$2\times13-1=25$

といった具合です。n で表された一般項というのは、こういう意味合いを持っています。ただし、数列によっては、一般項をnで表すのが困難な場合もあります。

いくつかの数列を同時に扱うような場合には、それぞれの数列を異なる文字を用いて表しますが、第何番目の項であるかが分かるように、文字の右下に小さな添え字を付けて表します。例えば、xを用いた場合には、初項がx_1、第二項がx_2、第n項がx_nといった調子です。上にあげた数列の例を文字 x を用いて表すことにすれば、$x_1=1$、$x_2=3$、$x_n=2n-1$となります。また、数列そのものを、第n項を{　}でくくって、$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{x_n\}$などと表します。約束ごとをいろいろ並べましたが、あまり気にしなくてもよいでしょう。読み進めていくうちに自然と慣れていきます。

それでは話を進めていきますが、まず、フィボナッチの数列を$\{x_n\}$で表すことにします。$x_1=1$、$x_2=1$、$x_3=2$、$x_4=3$、･･･、のようになります。この表記を用いれば、フィボナッチの数列そのものを、その特徴（規則性）を捉えて、次のように表すことができます。

$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$（$n\geqq1$、ただし、$x_1=1$、$x_2=1$）　･･･ ①

nを1にすると、$x_3=x_2+x_1$となりますが、$x_1=1$、$x_2=1$を代入すれば、$x_3=2$が求まります。次に、$n=2$にすれば、x_2と今求められたx_3を使って、x_4が求められます。以下同様に任意のnに対するx_nが求められることになります。つまり、①の式はフィボナッチの数列の全体を表した式ということができます。なお、①は

$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$（$n\geqq3$、ただし、$x_1=1$、$x_2=1$）

と表すこともできます。どちらでも意味は変わらないことを確認してください。

さて、ここからが黄金比に向けての話になります。フィボナッチの数列において、隣同士の数の比の値について考えていきます。一般的な言い方をすると、x_{n+1}/x_n です。具体的

に数で表すと、

　1/1、2/1、3/2、5/3、8/5、13/8、21/13、34/21、55/34、89/55、・・・

となります。これらの分数（比の値）を実際に計算して、少数で表すと、

　1、2、1.5、1.6666・・・、1.6、1.625、1.6153・・・、1.6190・・・、1.6176・・・、1.61818・・・、・・・

　となります。もとの数列が限りなく続きますから、この比で表される数列も無限に続きます。ここに示した何項かで、1.61・・・ という値に近づいていくように見えますが、果たしてこの比の値は最終的にどうなるのか（本当にある値に近づいていくのか、近づいていくとしたらそれはどのような値か）、そのあたりのことをこれから考えていきます。①の式で進めていきますが、比の値が問題になっていることから、両辺を x_{n+1} で割ります。

　$x_{n+2}/x_{n+1}=1+x_n/x_{n+1}$　$(n\geqq 1)$　・・・ ②

　見やすくするために、比の値 x_{n+2}/x_{n+1} を、y_{n+1} で書き換えることにします。

　$x_{n+2}/x_{n+1}=y_{n+1}$

　この等式の両辺において、n を 1 だけ小さくすると、

　$x_{n+1}/x_n=y_n$

　となりますが、この両辺の逆数を考えると、$x_n/x_{n+1}=1/y_n$ です。よって、②の式は

$y_{n+1}=1+1/y_n$　$(n\geqq 1)$　・・・ ③

となります。我々が求めようとしているのは、n を限りなく大きくしたときに、y_n がどのような値に近づいていくかです。ここで、y_n がある値に近づいていくものとして、その値を t とします。

注）このことに関しては後ほど（かなり重要な話）。

　y_n が t に近づくということは、当然 y_{n+1} も同じ値 t に近づいていきます。即ち、③の式で、両辺の n を限りなく大きくすると、

　$t=1+1/t$　・・・ ④

　になります。この式の両辺を t 倍して左辺に移項すると、

　$t^2-t-1=0$

　という t の 2 次方程式になります。2 次方程式の解の公式で解くと、

　$t=(1\pm\sqrt{5})/2$

　2 つ出てきましたが、符号が－の方は値が負になるので不適であり、従って、我々が求めようとしているのは、

　$t=(1+\sqrt{5})/2$

　ということになります。

　これが、フィボナッチの数列における、隣り合った二項の比の値が行き着く先の値（数学では、このような値のことを極限値という）です。そして、実はこれがまさしく「黄金比」の値なのです。余計な話ですが、きっかりした数値ではなく、無理数（無限に続く少数で表される）であるところが奥深い感じがします。さて、$\sqrt{5}=2.2360679\cdots$ですから、

　$t=1.61803395\cdots$

　となります。

　黄金比の値が求められましたが、次へ進む前に一つ確認しておきたいことがあります。

ただし、かなり数学的なことになるので、軽い気持ちで読み流すか、場合によっては飛ばしてしまってもかまいません（★印まで）。

何の話かと言うと、上の 注）に関することです。③の式から、y_n、y_{n+1} が近づいていく値を t として話を進めていますが、数学的にはこれらがある有限な値に近づくということを確かめる（厳密な言い方をすると、証明する）必要があります。

数列$\{y_n\}$が単調に増加する数列で、すべての項がある値より小さい（あるいは単調に減少する数列で、すべての項がある値より大きい）ということが成り立てば、確かに言えそうですが、上で見たように、数列$\{y_n\}$の項は大きくなったり小さくなったりします。そこで次のようにします。

隣り合った二項の差 $y_{n+1}-y_n$ を計算します。確認したい（証明したい）のは、この差の値が 0 に近づくことです。そうすれば、数列$\{y_n\}$はある値に近づくことになります。

$y_{n+1}-y_n=x_{n+2}/x_{n+1}-x_{n+1}/x_n$

$=(x_{n+2}\cdot x_n-x_{n+1}^2)/x_{n+1}\cdot x_n$

分子を取り出します。

分子$=x_{n+2}\cdot x_n-x_{n+1}^2$ ・・・ ⑤

①において、$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ だから、上の⑤に代入して、

分子$=(x_{n+1}+x_n)x_n-x_{n+1}^2$

$=x_{n+1}\cdot x_n+x_n^2-x_{n+1}^2$

$=-x_{n+1}(x_{n+1}-x_n)+x_n^2$

①において、$x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ より、$x_{n+1}-x_n=x_{n-1}$ だから、

分子$=-x_{n+1}\cdot x_{n-1}+x_n^2$

$=-(x_{n+1}\cdot x_{n-1}-x_n^2)$ ・・・ ⑥

⑤と⑥を見比べてみます。⑥の（ ）の中身は⑤の n を 1 だけ小さくしたものになっています。分かりやすくするために、⑤の式（分子）を p_n と表すことにします。

$p_n=x_{n+2}\cdot x_n-x_{n+1}^2$

すると、⑥の（ ）の中身は p_{n-1} ですから、

$p_n=-p_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ ・・・ ⑦

になります。この式で n を 1 だけ小さくすると、

$p_{n-1}=-p_{n-2}$ ・・・ ⑧

⑧を⑦に代入して、

$p_n=-(-p_{n-2})$

$=(-1)^2\cdot p_{n-2}$ （注：$(-1)^2$ を 1 としないのがポイント）

以下、この関係を繰り返していくと

$p_n=(-1)^3\cdot p_{n-3}$

$=(-1)^4\cdot p_{n-4}$

・・・

$=(-1)^{n-1}\cdot p_1$

$=(-1)^{n-1}(x_3\cdot x_1-x_2^2)$

$=(-1)^{n-1}(2\cdot 1-1^2)$

$=(-1)^{n-1}$ $(n \geqq 1)$　　注) $n=1$ のとき、$p_1=(-1)^0$ だが、一般に $a^0=1$(§23)

よって、数列$\{p_n\}$すなわち y_n-y_{n-1} の分子は$(-1)^{n-1}$となり、n が偶数なら＋1、n が奇数なら－1 ということが分かります。つまり、数列$\{y_n\}$における、隣り合った二項の差において、分子は＋1 と－1 を繰り返すだけであり、分母はいくらでも大きくなっていきます。ということは、隣り合った二項の差が限りなく 0 に近づくことを意味しており、数列$\{y_n\}$がある値に近づくということにほかなりません。

(★飛ばして良いのはここまで)

飛ばした人も次の 注)は読んでおくと良いでしょう。フィボナッチの数列の興味深い特徴の一つについて触れています。

注)上の話の中に登場する数列$\{p_n\}$の一般項、$p_n=-(x_{n+1}\cdot x_{n-1}-x_n^2)$ はよく見ると、第 n 項 x_n において、その前後の数を掛け合わせた値から自身を二乗した値を引いたもの(さらにその－1 倍)になっている。そして $p_n=(-1)^{n-1}$ である。これを実際に確かめてみる。

1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、・・・

$1\times2-1^2=1$、$1\times3-2^2=-1$、$2\times5-3^2=1$、$3\times8-5^2=-1$、・・・、

$21\times55-34^2=1155-1156=-1$、$34\times89-55^2=3026-3025=1$

そうなる訳を上で証明している。

黄金比に関しては最初にも書いたように多方面で活用されていることが広く知られています(小中学生の算数・数学や美術の教科書等でもよく見かけます)。ここでは、筆者が最も興味を持った黄金比に関する話題(本文の最後の四行)を紹介します。数学的に面白い話も関わってきます。

結果的に黄金比は④の

$t=1+1/t$

から計算される値ということでしたが、この式から非常に特徴的な事柄が導かれます。この式の右辺の t に t 自身を代入すると次のようになります。

$t=1+1/(1+1/t)$

さらに t に t 自身を代入するという操作は無限に続けられます。

$t=1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(\cdots)))))$　・・・ ⑨

このように表される式を連分数と言います。なお分数の分子の部分が 1 でない連分数の場合もりますが、ここでは常に 1 であるもを考えることにします。⑨の式の意味を理解するために、少し連分数の話をします。

一般にある数を連分数で表わすには次のようにします。その数の整数部分を引いた小数部分を分子が 1 の分数で表し、その分母の整数部分を引いた小数部分を分子が 1 の分数で表し、・・・の繰り返しです。訳の分からない説明なので具体例を見たほうが分かり易いでしょう。$\sqrt{3}$ を例に示します。

$\sqrt{3}=1.7320508\cdots=1+0.7320508\cdots$

$=1+1/1.3660254\cdots$　　$(0.7320508\cdots=1/1.3660254\cdots)$

$=1+1/(1+1/2.732508\cdots)$　　$(0..3660254\cdots=1/2.732508\cdots)$

＝1＋1/(1＋1/(2＋1/1.3660254･･･))　(0.7320508･･･＝1/1.3660254･･･)
＝1＋1/(1＋1/(2＋1/(1＋1/2.732508･･･)))
･･･
＝1＋1/(1＋1/(2＋1/(1＋1/(2＋1/(1＋･･･)))･･･

無理数の$\sqrt{3}$ が、1、1、2、1、2、1、･･･ という整数の列になるのが奇妙に感じられるでしょう。試しに$\sqrt{2}$ でやってみてください。1、2、2、2、･･･ になります。

さて、少々しつこく感じるかもしれませんが、もう一つだけπでやってみましょう。なかなか興味深いことが起きます。できたら関数電卓を用意して(例によって PC の)、自身で試しながらやってみると良いでしょう。

まず、$\boxed{\pi}$キーでπの値(3.14･･･)を表示します。そこから整数部分の 3 を引いて、

0.14159･･･　(＝π－3)
$\boxed{1/x}$キーで逆数にします。　π＝3＋0.14159…＝3＋1/7.0625…
7.0625･･･　(＝1/0.14159…)
整数部分の 7 を引いて、　π＝3＋1/(7＋0.0625…)
0.0625…　(＝7.0625…－7)
$\boxed{1/x}$キーで逆数にします。　π＝3＋1/(7＋1/15.9965…)
15.9965…　(＝1/0.0625…)
整数部分の 15 をひいて、　π＝3＋1/(7＋1/(15＋0.9965…))
0.9965…　(＝15.9965…－15)
$\boxed{1/x}$キーで逆数にします。　π＝3＋1/(7＋1/(15＋1/1.0034…))
1.0034…　(＝1/0.9965…)
整数部分の 1 を引いて、　π＝3＋1/(7＋1/(15＋1/(1＋.0034…)))
0.0034…　(＝1.0034…－1)
$\boxed{1/x}$キーで逆数にします。　π＝3＋1/(7＋1/(15＋1/(1＋1/292.6324…)))
292.6348…　(＝1/0.0034…)
整数部分の 292 を引いて　π＝3＋1/(7＋1/(15＋1/(1＋1/(292＋0.6324…))))
･･･

この操作はこのあとも永久に続けられるわけですが、この時点で最後の分数 1/(292＋0.6324…)は分母がかなり大きいので、これを 0 とみなすことにします(分数は分母が大きいほどその値は 0 に近い)。

π≒3＋1/(7＋1/(15＋1/(1＋0)))
＝3＋1/(7＋1/16)
＝3＋1/(112＋1)/16
＝3＋16/113
＝(339＋16)/113
＝355/113
＝3.14159292035…

πの本来の値は3.141592654…ですから、355/113の値はなんと小数点以下6位まで一致しています！今求めた連分数は本来のπの値からスタートしているので、余り意味のあることとは言い難いですが、かなりの精度でπの値に近い分数を見つけることができまし

た。
　さて、いままで何故このような（連分数の）話を長々と続けたのか。元の黄金比の話に戻ります。黄金比の場合はこれも特徴の一つですが、④および⑨を見ると分かるように、$\sqrt{3}$やπでやったような計算をしなくても直ちに連分数で表せる形をしています。ところで、πの連分数表示では、ある段階でたまたま分母の整数部分が大きな値になり、その分数を 0 とみなすことによってπの値に近い分数を見つけることが出来ました。このことを頭に入れつつ⑨を見て下さい。黄金比の連分数表示では、分母の整数部分はどこまで行っても一番小さい整数 1 です。つまり、どこまで行っても分母が小さいのでその分数を 0 とみなし難いのです。これから何が言えるかというと、「黄金比は分数で近似しにくい数」ということになります。このことを言いたくて、理解しやすいようにわざわざπの連分数表示を持ち出しました。
　それでは目的だった話題に移ります。出来たらコンパスと分度器を用意してください。まず適当な大きさの円を描きます。円周上に基準となる点を決めてそこから 222.5°を図って印を付けます。そこからまた 222.5°を図って印を付けます。これを出来るだけ何回も何回も繰り返してみてください。繰り返しの回数を出来るだけ多くするほど話の意図が見えてきます。
　222.5°というのは、360°を黄金比で割った値（360°÷1.6180…＝222.4922・・・°）です（360°に黄金比を掛けて 360°を引いても同じ値になります。どうしてかは是非考えてみて下さい）。黄金比は上で見たように分数で近似しにくい値でした。従って何回繰り返してもなかなか元の点に重ならないのです。これがもしもある分数、例えば 7/13 に近い値だったら、13 回目には 7 周して出発点近くになるはずです。
　このことを自然界に見ることができるというのです。『樹木の幹から生える枝は幹を上から見たとき、黄金比となるような位置から次々と伸びる』というのです。根から吸い上げられ幹を伝って上がってくる水分や養分が、出来るだけ下の枝に奪われないような位置を確保するため？太陽からの光を、出来るだけ自分より下の枝たちにも注がれるようにするため？