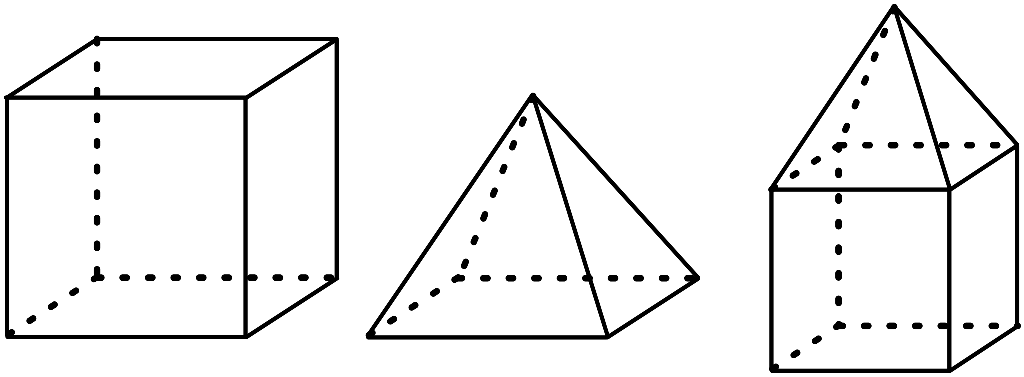
§7. この世には 5 つしか存在せず（「コーヒーカップ＝ドーナツ」の世界）

立方体（サイコロ）には 6 個の面があり、8 個の頂点があり、12 個の辺（稜とも言うが、ここでは辺で）があります。また、四角垂（ピラミッド）には 5 個の面と、5 個の頂点と、8 個の辺があります。もう一つ、今の 2 つの立体において、それぞれの正方形の面を同じ大きさにして貼り合わせた塔のような形では、9 個の面と、9 個の頂点と、16 個の辺があります。

多面体における面、頂点、辺の数



面：6 頂点：8 辺：12	面：5 頂点：5 辺：8	面：9 頂点：9 辺：16

さて、今取り上げた 3 つの例において、面と頂点と辺の数をじっと眺めると、次のことに気が付きます。最初の 2 つ（面、頂点）の数の和が、3 つ目（辺）の数よりちょうど 2 だけ大きい（6＋8＝12＋2、5＋5＝8＋2、9＋9＝16＋2）。

結論から言うと、実はどのような多面体においても、この関係が成り立つのですが、この関係式を『オイラーの多面体定理』と言います。オイラー（1707～1783）というスイス生まれの数学者が見出した定理です。

注）『オイラーの定理』ということもあるが、単にオイラーの定理というと、別の超有名な公式（§27 に登場）を指すのが一般的で紛らわしいので、多面体定理ということが多い。

『 任意の多面体（ただし、ドーナツのように穴はあいていないものとする）において、
（面の数）＋（頂点の数）＝（辺の数）＋2
という関係式が成り立つ 』

というものです。でたらめな多面体というのはイメージしにくいですし、図にも描きにくいですが、できたら簡単な図形でいろいろ確かめてみてください。この式はこのあとしばしば登場しますが、日本語のままでは扱いにくいので、アルファベットを用いて書き換えること

にします。面(face)、頂点(vertex)、辺(edge)の頭文字を用いて、

$$f+v=e+2 \quad \cdots \quad ①$$

と表すことにします。実はこの章で扱おうとしている「5 つしか存在せず」とは何かというと、正多面体のことなのですが、そのことの証明に、このオイラーの定理が使われるのです。オイラーの定理の証明法も、非常に興味深いものがあるのですが、これに関しては章の後半のところで紹介することにします。

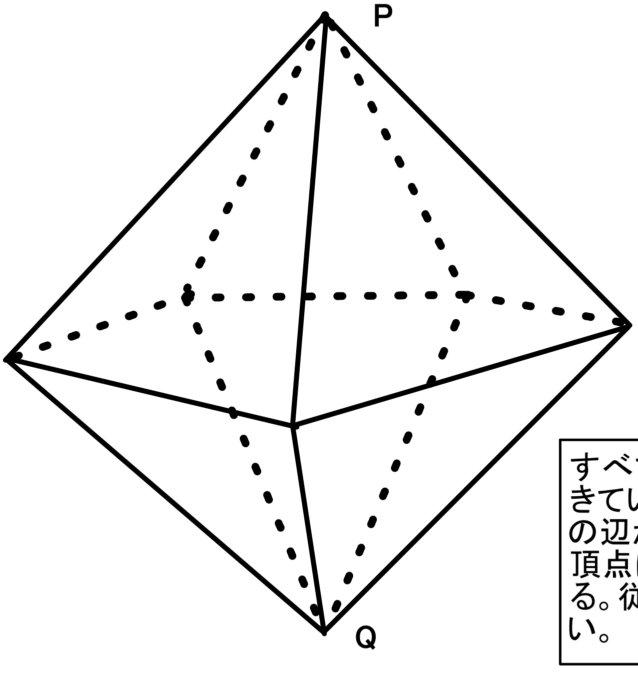
それでは本題に戻って、この世には正多面体が 5 つしか存在し得ないという話です。まず、正多面体とはどのような立体かということから考えてみましょう。これは単純に考えて、

ⅰ〕立体を構成するすべての面が同じ正多角形でできている。

ということだけでよさそうな気がしますが、実は不十分です。この条件だけでは図＿のような正多面体でない立体が成立してしまいます。つまり、どの頂点(面でもよい)を上にしても、常に同一の立体になるためには、もう一つの条件

ⅱ〕どの頂点からも同じ数の辺がのびている。

が必要になります。この 2 つの条件を満たせば、正多面体となりそうです。と言うより、この 2 つの条件を満たすような立体のことを正多面体と呼ぶことにします。



すべての面が同じ正三角形でできている十面体。頂点P、Qは5本の辺が集まっているが、残りの頂点には4本の線が集まっている。従って正多面体とはいえない。

今、次のような正多面体を考えます。条件ⅰ〕を考慮して、

『 いずれの面も k 個の辺からなっている 』

ものとします。また、条件ⅱ〕を考慮して、

『 いずれの頂点からも n 本の辺が出ている 』

ものとします。そして、面の数、頂点の数、辺の数は先ほどの f、v、e をそのまま使います。

文字が全部で 5 個も出てきて、この先どうなるだろうと不安になるかもしれませんが、それほど大変ではありません。

まず辺の数について考えると、

fk＝2e　・・・②

が成り立ちます。左辺は、一つの面を構成する辺の個数（k）と、面の総数（S）とを掛け合わせたものですが、よく考えると分かるように、どの辺も二つの面の共有辺として 2 度ずつ数えられているので、左辺の値は辺の総数の 2 倍に等しくなります。

次に、別の角度から同じく辺の数について考えると、

vn＝2e　・・・③

が成り立ちます。左辺は、一つの頂点から出ている辺の数（n）と頂点の総数（S）とを掛け合わせたものですが、どの辺も両端の頂点から 2 度ずつ数えられているので、左辺の値は辺の総数の 2 倍に等しくなります。

②より、f＝2e/k　・・・②'

③より、v＝2e/n　・・・③'

ですが、この②'と③'を①に代入すると、

2e/k＋2e/n＝e＋2　・・・④

となります。この式の両辺を 2e で割ると

1/k＋1/n－1/2＝1/e　・・・⑤

です。なんだか訳のわからないことをやっているようですが、もう少しすると先が見えてきます。さて、⑤の式をじっくりながめてみましょう。まず確認ですが、k は一つの面における辺の個数ですから、3≦k です。また、n は一つの頂点から伸びる辺の個数ですから、3≦n です（n＝2 では立体にならない）。さて、⑤の式の左辺において、k、n の値をあまり大きくすると、－1/2 の項があるので負になってしまいます。たとえば、k＝n＝6 にすると、

左辺＝1/6＋1/6－1/2＝－1/6

となります。一方、右辺は全体の辺の個数 e の逆数ですから当然正の数です。このことから、k、n は、3、4、5 程度の数しか当てはまらないことが予想できます。

注）⑤の式から k、n を考えたが、次のようにも考えられる。正多角形で内角が一番小さいのは正三角形で 60°。したがって一つの頂点から伸びる辺の数は 5 以下である。なぜなら 6 本だとそこに集まる面の内角の和が 60°×6＝360°となり平面になってしまう。

あとは、具体的に求めるのみです。

Ⅰ）k＝3 のとき

④に代入して

1/3＋1/n－1/2＝1/e

1/n－1/6＝1/e　・・・⑥

この式の左辺の値が正となる n の値は 3、4、5 であると判断できます。続けて

この k、n に対する e、さらには f、v の値も求めます。

ⅰ）n＝3 のとき

⑥に代入して

1/3－1/6＝1/e

よって、e＝6。また、②'より、f＝4。③'より、v＝4 です。

従って、面:4、頂点:4、辺:6　・・・正四面体

ⅱ）n＝4 のとき

⑥に代入して

1/4－1/6＝1/e

よって、e＝12。また、②'より、f＝8。③'より、v＝6 です。

従って、面:8、頂点:6、辺:12　・・・正八面体

ⅲ）n＝5 のとき

⑥に代入して

1/5－1/6＝1/e

よって、e＝30。また、②'より、f＝20。③'より、v＝12 です。

従って、面:20、頂点:12、辺:30　・・・正二十面体

続けて、Ⅱ）k＝4 のとき、Ⅲ）k＝5 のとき、とやりたくなりますが、実は次のように考えると、やらなくても済みます（数学ではこういう発想が大事）。⑤の式をもう一度よく見てみましょう。この式は、k と n に関して区別がありません。つまり、k と n を入れ替えても式自体何も変わりません。数学ではこのようなとき、この式は k と n に関して対称であるという言い方をします。k と n の解が一組見つかれば、それらの値を入れ替えたものもその式の解になります。

さて、Ⅰ）のⅱ）において、k＝3 と n＝4 を入れ替えれば、f＝6、v＝8 が求まるはずです。従って、面:6、頂点:8、辺:12　・・・正六面体

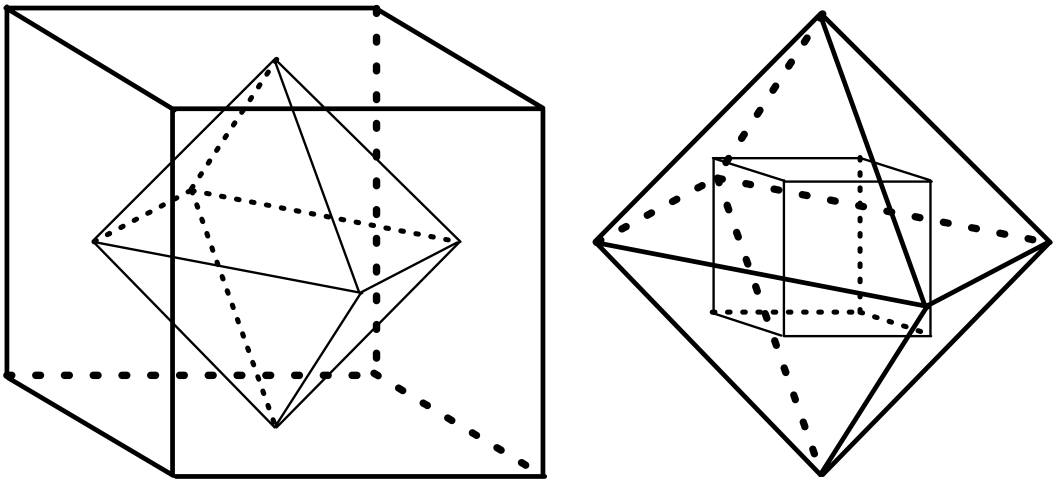
同様に、Ⅰ）のⅲ）において、k＝3 と n＝5 を入れ替えると、f＝12、v＝20。従って、面:12、頂点:20、辺:30　・・・正十二面体

これで 5 つ出そろいました。導く過程において分かるように、正多面体はこれ以外にはありえません。それでは改めて、5 つをまとめてみましょう。ここでは、面の数の少ない順番で並べます。

	名称	f:面	v:頂点	e:辺	一つの面の辺の数	頂点からの辺の数
1	正四面体	4	4	6	3（正三角形）	3
2	正六面体	6	8	12	4（正四角形）	3
3	正八面体	8	6	12	3（正三角形）	4
4	正十二面体	12	20	30	5（正五角形）	3
5	正二十面体	20	12	30	3（正三角形）	5

2 と 3 および 4 と 5 が、それぞれ k と n の値を入れ替えた関係にある組です。そして、面と頂点もそれぞれ入れ替えた関係にあります。面と頂点を入れ替えた関係にあるということを、実際の図形においてもう少し考えてみましょう。図__の正六面体をご覧ください。各面の中心を頂点とし、隣り合った頂点をそれぞれ結ぶと正八面体ができます。即ち、正六面体の 6 つの面が正八面体の 6 つの頂点に対応していることが分かります。同様に、正八面体の各面の中心を頂点とする形で線で結ぶと、正六面体ができることから、逆の対応に

ついても了解できます。容易に想像できると思いますが、今と同じことが 4 と 5 の組、即ち正十二面体と正二十面体との間にも成り立ちます。



正六面体の各面の中心を結ぶと
正八面体

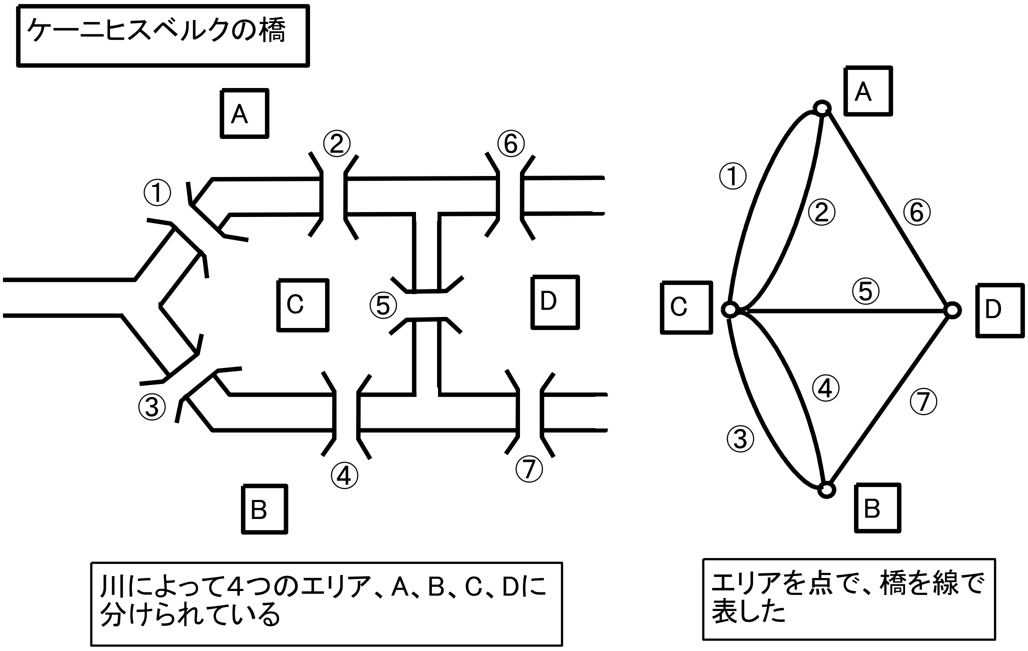
正八面体の各面の中心を結ぶと
正六面体

正六面体と正八面体は
面⇔頂点　の関係

オイラーの定理のおかげで、この世に存在しうる 5 つの正多面体を解明することができました。今度は、このオイラーの定理が導かれる過程を紹介しようと思いますが、まずその予備知識として、幾何学のある分野の話をします。

我々が小学校以来勉強してきた幾何学は、図形の形や大きさを常に問題としてきました。つまり、図形における辺の長さや角度、そして面積、体積などです。また図形同士の合同や相似などといった関係についても考えたりしました。ところが、今から紹介する幾何学では、そういったことを一切問題としないのです。幾何学においてこのような考え方をする分野のことを、特に「位相幾何学」と言ったり、「トポロジー」と言ったりします。本書では、トポロジーという言い方をしていくことにします。

さて、トポロジーの話しをする際に、よく引き合いに出されるのが一筆書の問題です。話しも分かり易く、トポロジーの概念を知るためにも適しているからですが、ここでも、一筆書きの例から始めることにします。図__は昔から問題として出されたことで有名な、ケーニッヒスベルグの橋の地図です。この地図に記された 7 つの橋を、どの地点からスタートしてもよいが、全て渡るように歩くことができるかという問題です。ただし、どの橋も一度だけしか渡れません。問題を解くことが目的ではないので、結論を言ってしまいますが、これは不可能なことです(オイラーが証明した)。この問題を提示された際、図__のように書き換えて考えるというやり方は、それほど突飛なこととは感じられないでしょう。A、B、C、D の 4 つの地域を点で表し、7 つの橋をそれらの間を結ぶ線で表しています。即ち、7 つの橋をすべて歩



いて渡ることが可能かという問題が、一筆書きの問題に置き換えられているのです。今の問題では、橋の長さなどは問題ではなく、また 4 つの地域の大きさも問題ではありません。このように、図形における形や大きさを無視して、問題とする図形の本質のみを捉えようというのがトポロジーなのです。一筆書きの問題もいろいろ話題性豊かですが、ますます本題からはずれていってしまうので、控えることにします。

さきほどの正多面体も、今一度考えてみると、実は面、頂点、辺の数のみを問題としていました。正多面体という言い方をしましたが、本質的には、各面はきっちりとした正多角形である必要はありません。たとえば、正六面体(立方体)は歪んだ六面体でもかまわないのです。本質的なのは、6 個の面がいずれも 4 個の辺でできており、各頂点はいずれも 3 個の辺が集まっているということです。必要であれば、いつでも美しい正六面体として描くことができます。

前置きがずいぶん長くなりましたが、いよいよオイラーの定理の証明に移ります。
もう一度オイラーの定理を示します。
任意の多面体において(ただし、ドーナツのように、立体を突っ切るような穴は無いものとする)、面の数を f、頂点の数を v、辺の数を e とすると、

$f+v=e+2$

が成り立つ。

ここから証明です。まず、確認しておきますが、証明の段階で面、頂点、辺の数が刻々と変化します。つまり、f、v、e の値が変わりますが、常にそれぞれ同一の文字 f、v、e のままで表します。たとえば面の数が 1 減る場合にも、f−1 と表すのではなく、f のままです。f は、そのときの図形における面の数を表します。v、e についても同様です。それでは、先へ進みます。

$S=f+v-e$

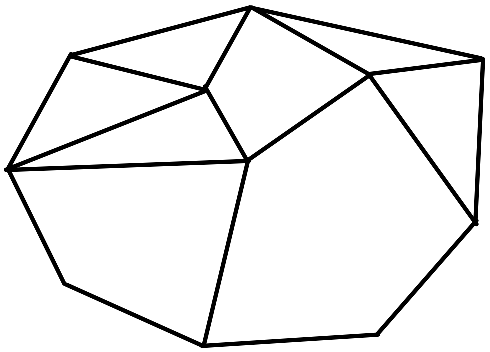
とおいて、最終的にこの S の値が 2 であることを示します。いきなりですが、これでも数学？と疑いたくなるような暴挙にでます。まず、ある一つの面をはがします。そして、そこに手をこじ入れて、立体の全体が平らになるように引き伸ばします。イメージしにくいかもしれませんが、辺も面も自由に伸び縮みする素材でできているものと考えてください。平らに引き伸ばすという作業は本当は必要無いのですが、図を描きやすくし、話を分かりやすくするためです。辺の長さや面の形にとらわれないという、いかにもトポロジーて的な展開です。

注）ゴムでできたボールなら、今のようにできることは想像できるでしょう。ところが、タイヤのチューブのようなドーナツ状のものではできないということも想像できるでしょう。つまりトポロジーでは、球とドーナツでは本質的に形が異なります。逆にドーナツとコーヒーカップは同じ形と言えます。

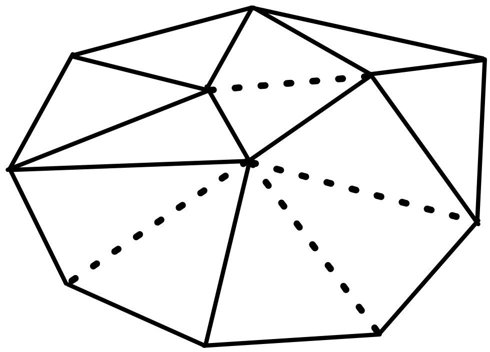
証明はこの先三つの段階を踏みます。

【第一段階】

元の立体（図__）において、辺の数が４以上の面がある場合は、それぞれの面において次のようにします。適当に必要な数だけ対角線を引いて（この対角線は新たな辺になる）、三角形の面だけからなるようにします。今の操作において、対角線を一本引くとによって、辺が 1 個増え、面は 2 分割されることによってやはり 1 個増えます。従って、f と e がそれぞれ 1 大きくなりますが、S＝f＋v－e の値は変わりません。全ての四角形以上の面でこの操作を施した時点で、S の値は変わっていません。



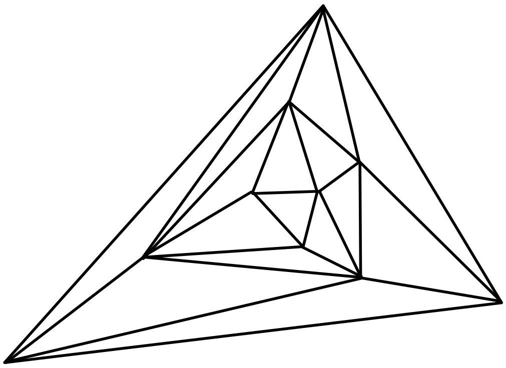
でたらめな多面体（見えない部分は省略した）



全ての面が三角形になるように辺を加えた。辺が一つ増えるごとに面も一つ増えている。

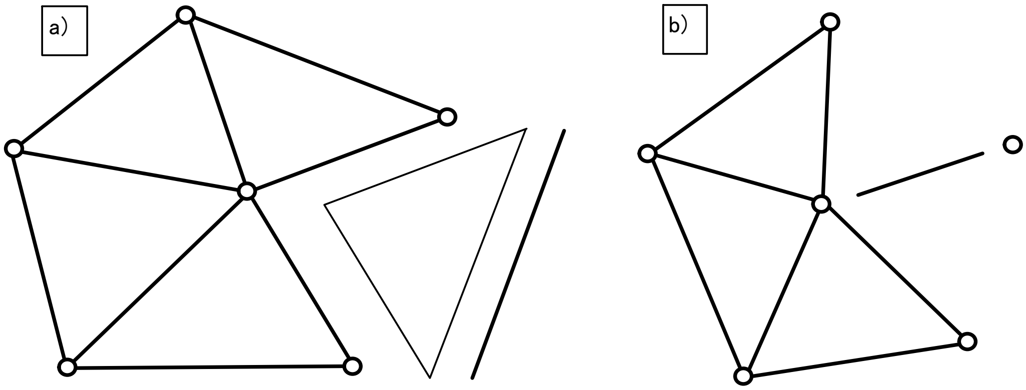
【第二段階】

どれか一つの面をはずしそこに手を突っ込んで平らに広げます。一番外側の線ははがした三角形の三つの辺です。

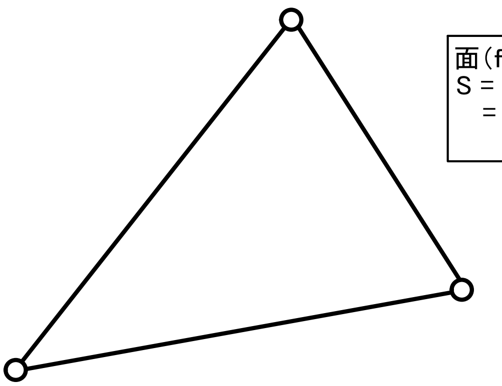


【第三段階】

今度は端から辺、面、頂点を次に示す操作に従って、一つずつ取り除いていきます。図__で説明していきますが、桟で仕切られたガラス窓をイメージすると、分かりやすいと思います。



なお、頂点は○印で誇張して描いています。図の a）では、桟（辺）を外してガラス（面）を引き抜いています。このとき、辺（e）と面（f）が 1 個ずつ減りますから、S の値は変わりません。図の b）では頂点（v）と辺（e）を取り除いています。このときも S の値は不変です。a）、b）の操作を繰り返していくと、最後には一つの三角形だけとなるはずです。



面（f）：1　頂点（v）：3　辺（e）：3
S＝f＋v－e
　＝1＋3－3

このとき、面の数は 1 個、頂点の数は 3 個、辺の数は 3 個ですから、

S＝f＋v－e＝1＋3－3＝1

となります。第二段階のところで、面(f)を１個取り除いているので、実際はｆが１だけ大きいはずです。従って、元の多面体においては、

$S=2$

となります。即ち、

$f+v-e=2$

です。