§6. 文句なしの山分け（ねたみも生じない分け方は可能か）

「何人かの間でジュースやケーキを喧嘩にならないように分け合う方法」はよく話題になるのでご存知の方も多いでしょう。この問題はかつては数学者や数学が関係するゲーム・パズルのスペシャリストたちも取り組んだということですから、それなりに奥深い問題と言えるのでしょう。ジュースの場合、同じコップが人数分用意されていれば問題にならないでしょうが、形やサイズが異なる場合は厄介です。よくこのジュースと形の異なるコップの場合で出題されますが、本格的に議論する場合はケーキが定番なので、ここでもケーキを分け合う問題として進めていきます。

二人で分け合う方法はよく知られており、誰でもすぐに納得できます。

『一人が二つに分け、相棒に選ばせる』

まず分ける方の人間は、均等であると納得がいくように分けさえすれば、相手がどちらを選んでも不満はありません。一方選ぶ方の人間は、自分が好きな方を選べるのですから、勿論不満はありません。以下話を進めていきますが、今のように各人が結果において不満を抱かない、常にこれが基本です。三人の場合がちょうど手ごろな問題となるので、ここでも三人の場合で進めていきます。四人の場合の山分けの仕方を紹介している本もありますが、かなりマニアックな（複雑すぎて理解するのが困難な）内容になります。

この先いくつかの方法を紹介しますが、できればまずご自身で考えてみることをお勧めします。というのは、これで三人とも納得できる方法を見出せたと思える場合でも、本当にこれでいいのかという微妙に引っかかる問題に気が付くからです。

結果において、三人ともが自分は確かに 1/3 以上確保できたというように思えるし納得できるというような手順が見出せたとして、果たしてこれで正解としていいのか？という懸念が付きまといます。どういうことかというと、どの人間にとっても 1/3 は確保できたとしても、他の二人が自分より多く手に入れたのではないかという疑念が払拭されない限り、正解（文句なしの山分け）とは言えないのではないか？ここに引っかかるのです。整理すると次のようになります。三人それぞれが、

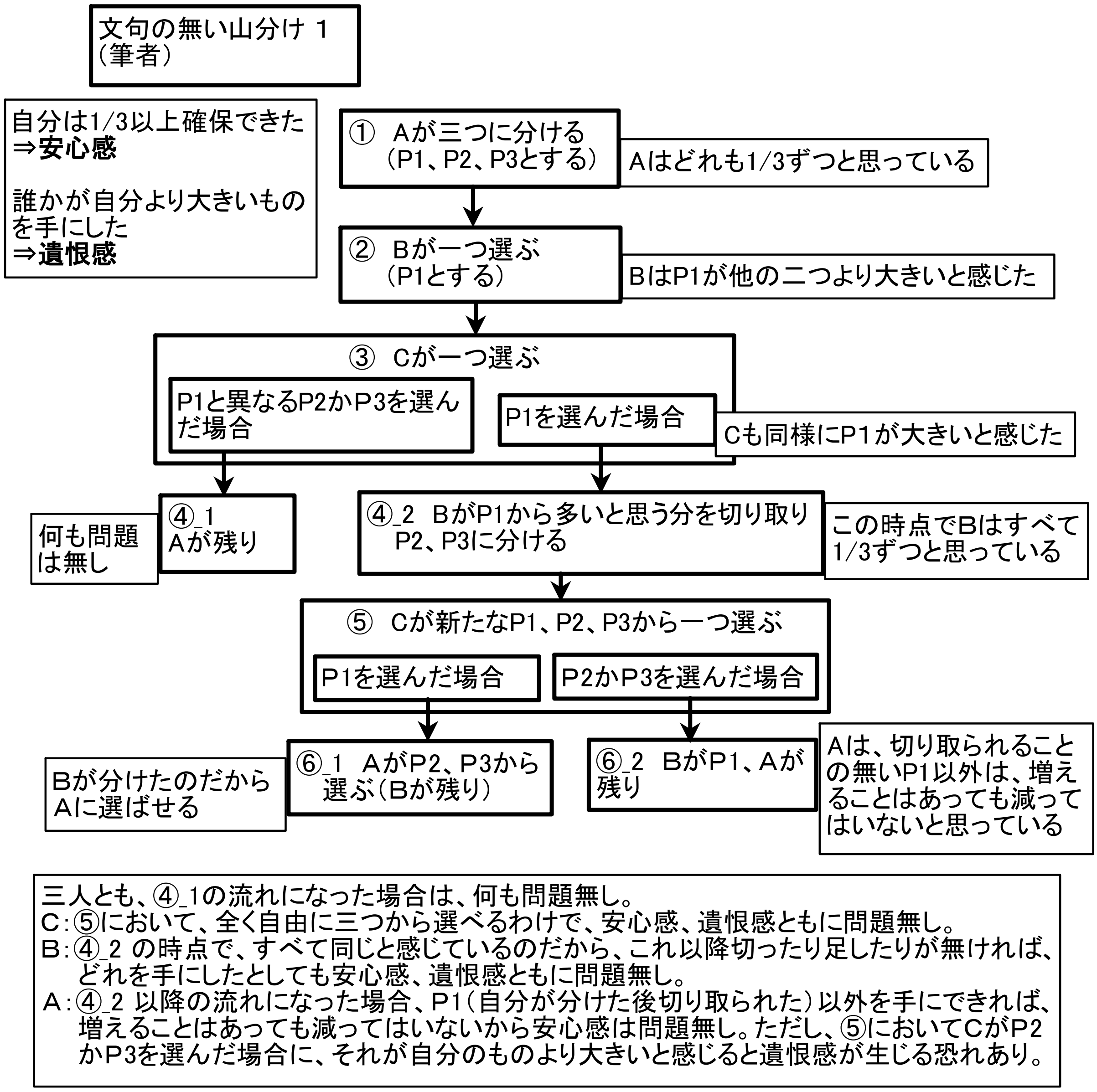
ⅰ)「自分は 1/3 以上は確保できたと感じる**安心感**」をもてること

ⅱ)「誰かの取り分が自分より多いと妬みを感じてしまう**遺恨感**」のないこと

このⅰ)、ⅱ)に関することを、筆者が過去に考案した方法を例に見ていきます。

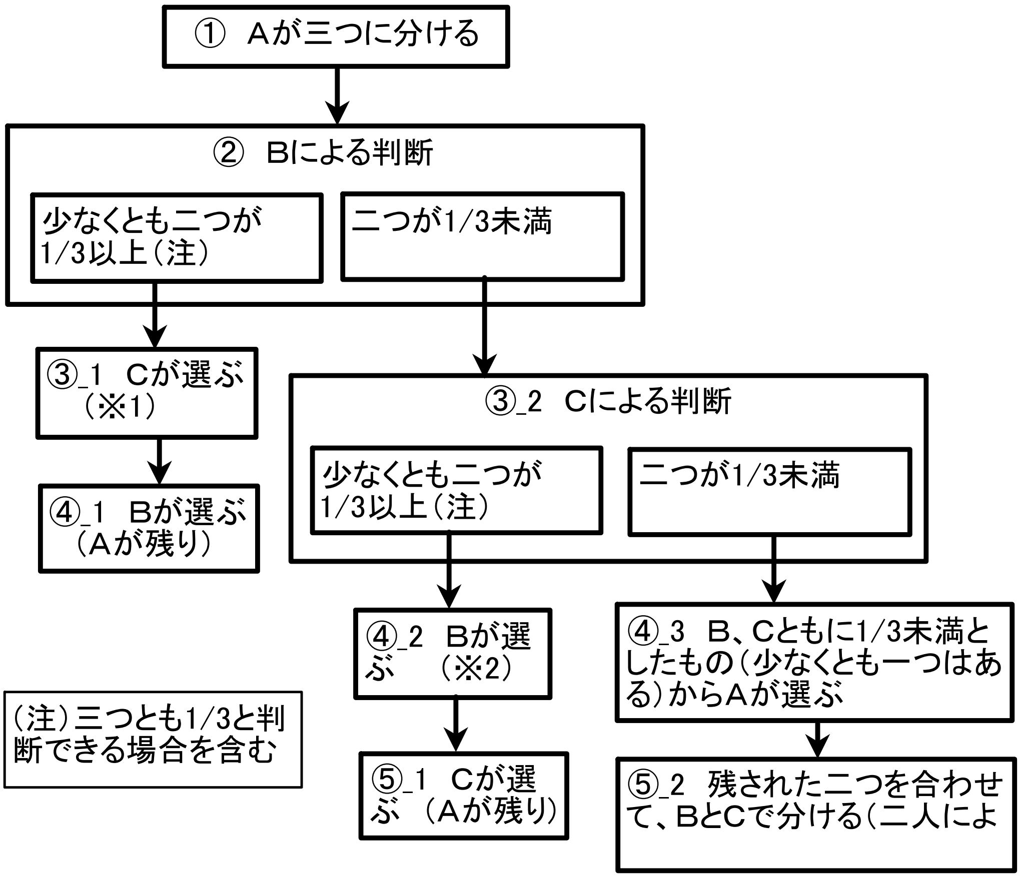
筆者が考案した方法（A、B、C の三人でケーキを分ける）

一番下の枠の中をごらんください。A、B、C それぞれの立場から、ⅰ)の安心感、ⅱ)の遺恨感、に問題は無いかまとめてあります。どのような流れになったとしても、三人とも安心感に関しては問題ありません。しかし、最初の時点で均等に分けたつもりの A にとっては、④で B が P1 を削って P2 あるいは P3 に付け足したということは、P2、P3 のどちらかあるいは両方は P1 より大きいと感じています。P2、P3 のどちらかを手にすることにはなっていますが、⑤で C が選んだ方が自分のより大きいと感じる遺恨感が生じる恐れがあります。微妙ではありますが、数学の問題としては解決する必要があります。



第二次世界大戦当時のポーランドのヒューゴー・ステインハウスという数学者が考案したという方法を紹介します。数学者らしいとても巧みな手法ですが、やはり遺恨感に関しては配慮がなされていません。

文句の無い山分け 2
（ステインハウス）



どの流れも三人にとって安心感には問題無いが、（※1）においてBの遺恨感が、（※2）においてCの遺恨感が生じる恐れあり

ステインハウスによる方法は、⑤に至る以前の段階では、再度切ったり足したりはしないという点が好ましくはありますがが、③あるいは④における遺恨感が生じる恐れが大きいと言えるでしょう。

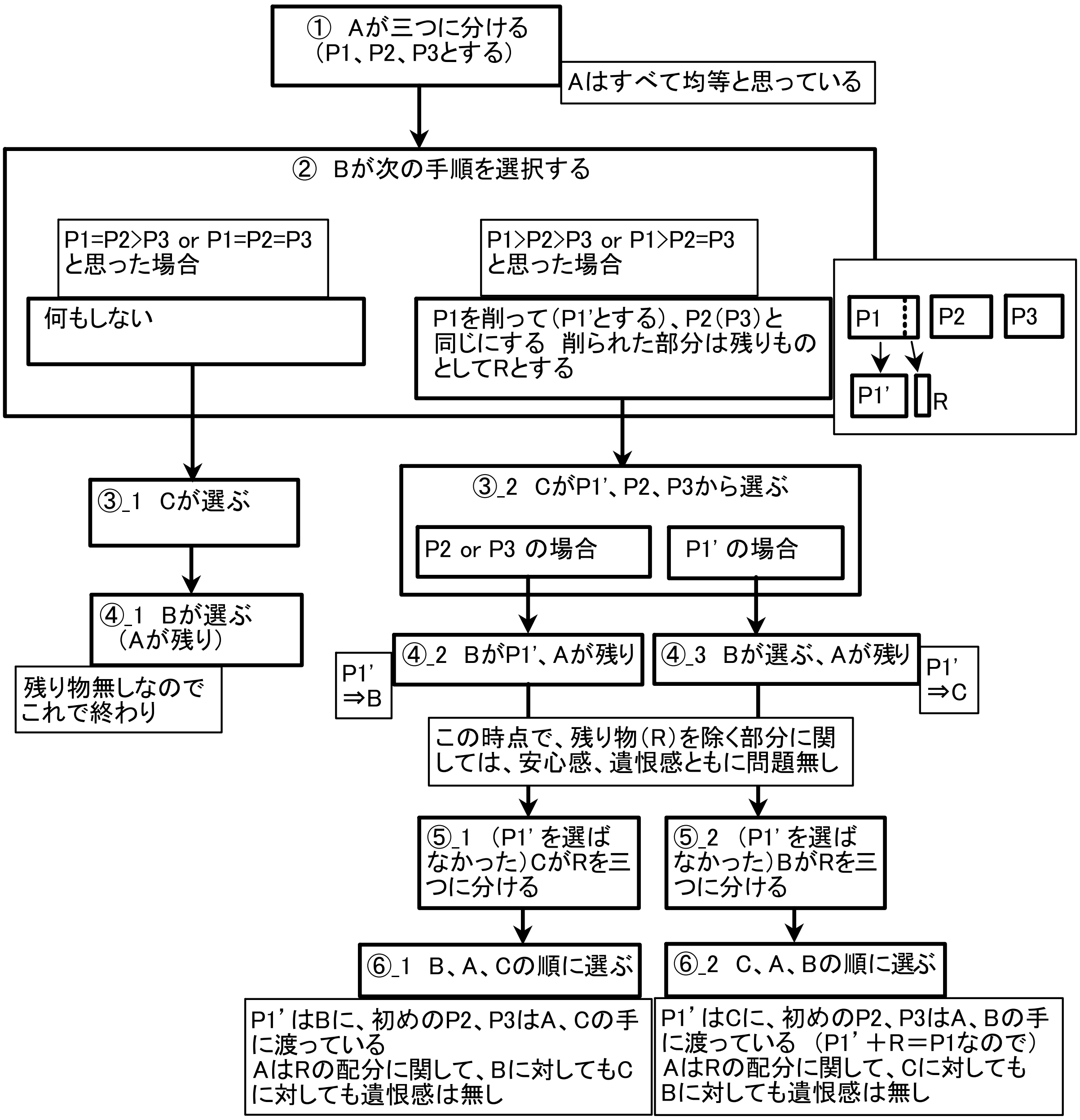
遺恨感を気にしなくてもよいのであれば、4 人以上でも何人でも安心感を持って山分けする単純で明解な方法があります。n 人いたとして、A1、A2、A3、…、An とします。A1 が 1/n と思える大きさを切り取ります。A2 はそれが納得できる大きさか判断し、納得できなければ多いと思われる分を切り取って元に戻します。A3 以降も同じことを繰り返し、An まで終わったところで、誰も切り取る者がいなければ A1 が、切り取った者が何人かいた場合は、最後に切り取った者が自分のものとします。結果的に分け前を手にした一人を除く n－1 人で同じことを行ってまた一人抜けます。これを二人になるまで繰り返し、最後は二人の間で例の山分け法を行って終了します。

理屈の上では納得させられますが、現実の問題と考えたらどうでしょう。上の解法と異なるのは、

最初に n 等分しないというところにあります。各人がすべてを目の前にして大きさを比較できないということは、もはや上で考えたのとは質の異なる問題と言えるのではないでしょうか。

最後にマーティン・ガードナーの「数学ゲーム」に掲載された完璧な解を紹介します。

文句の無い山分け 3 ＝完璧な解
（マーティン・ガードナー：数学ゲーム）



B は②2 で②1 と同じ状況を作っている。ここで P1' は B が作ったものであり、最初に均等にしたつもりの A から見れば減っていると感じる。従って P1' は A には渡らないようにする。A は P1' を

選んだ人に対しては、仮にその人が R を全て手にしたとしても遺恨感はない。さらに A は P2 または P3 を手に入れる自分ともう一人において、R の配分で優先されるので遺恨感はない。