§5. 異質な玉を天秤で見つけよ（4 個の場合は三回、12 個の場合も三回？）

いくつかある玉に一つだけふくまれる異質な（見た目は変わらないが、重さが異なる）ものを、天秤をできるだけ少ない回数用いて探し当てるという、これもよく知られた問題ですが、少し興味深い話につながるので紹介します。

一番良く知られているのが、

『12個の玉があってその中に1つだけ他と重さが異なるものが含まれている。その玉を天秤を三回使って突き止める方法を示しなさい。またその際異質な玉が重いか軽いかも明らかにしなさい』

というものです。初めてお目にかかる人にとってはそれほど簡単ではなく、我々凡人では一晩くらい悩んだりもします。下の解答を見る前に取り組んでみると良いでしょう。下の解答は筆者が考えたものですがほんの一例にすぎず、もっとスマートなやり方がいろいろあるかも知れません。

いきなり本題の解答に行く前に、少しヒントになるであろう話題を提供します。数学やパズルの問題でよくやることですが、いきなりその問題を解こうとするのではなく、その前に、一般論の問題であれば登場する数値を具体的な数で試してみるとか、具体的な数値であればその数を小さくしたり考えやすい適当な数に置き換えてみる、といった手を使ってみます。ここでは玉の数が12個なのでもっと少ない個数の場合で考えてみます。

①玉が A、B、C の3個の場合

【1】A と B をのせる。

（ア）A＞B ならAが重いかBが軽い。Cは正常（これが重要）

【2】A と C をのせる。

A＞C ならAが重い。A=CならBが軽い

（イ）A＝B ならAとBは正常でCが異質

【2】A と C をのせれば、C が重いか軽いか分かる

よって玉が3個の場合は2回で解決します。

②玉が A、B、C、D の4個の場合

【1】A と B をのせる。

（ア）A＝B なら異質なのはCかD（AとBは正常）。

【2】A と C をのせることで、C が正常か軽いか重いか分かる。

（C が異質なら2回で終わる）

【3】A と D をのせることで、D が正常か軽いか重いか分かる。

（イ）A＞B ならAが重いかBが軽い（CとDは正常）。

【2】A と C をのせる。A＞C ならAが重い。A＝C ならBが軽い

（この場合は2回で解決する）

＜別のやり方＞

【1】[A,、B] と [C、D] でのせる

(ア)[A、B] ＞ [C、D] ならA、Bの中に重いのがあるか C、Dの中に軽いのがある。

【2】AとBをのせる

(イ)A＝B なら【3】CとDをのせれば軽いほうが異質と分かる

(ウ)A＞B なら(C、Dは正常)、【3】AとCをのせてA＞CならAが重い。

A＝CならBが軽い。

いずれのやり方でも、玉の数が4個の場合に3回必要になるということが分かります。4個でも3回なのに、12個でも3回でできるの？この問題は解く前に首をかしげてしまいます。この問題を誰かに出すときは、今の4個の場合をあらかじめ話してみるとよいでしょう。まず誰でも驚きます。

それでは12個の場合の解答です。(ほんの一例)

12個の玉をA、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、Lとする

【1】[A、B、C、D] と [E、F、G、H] でのせる

(ア)[A、B、C、D] ＝ [E、F、G、H] の場合(AからHまでは正常)

【2】[I、J、K] と [A、B、C] でのせる。

(ウ)釣り合えばLが異質。【3】Lを他のどれかと比べて重いか軽いかが分かる。

(エ)[I、J、K] ＞ [A、B、C] の場合。I、J、Kのどれかが重い

【3】IとJを比べることで、どれが重いか分かる

([I、J、K] ＜ [A、B、C] の場合は同様にして、I、J、Kのどれが軽いかが分かる)

(イ)[A、B、C、D] ＞ [E、F、G、H] の場合(IからLまでは正常)、A、B、C、Dの中に重いのがあるかE、F、G、Hの中に軽いのがある。(この次がポイント)

【2】[A、B、C、H] と [D、I、J、K] でのせる

(オ)釣り合えばE、F、Gの中に軽いのがある(のせた玉は全て正常)。

【3】EとFをのせればどれが軽いか分かる(釣り合えばGが軽い)。

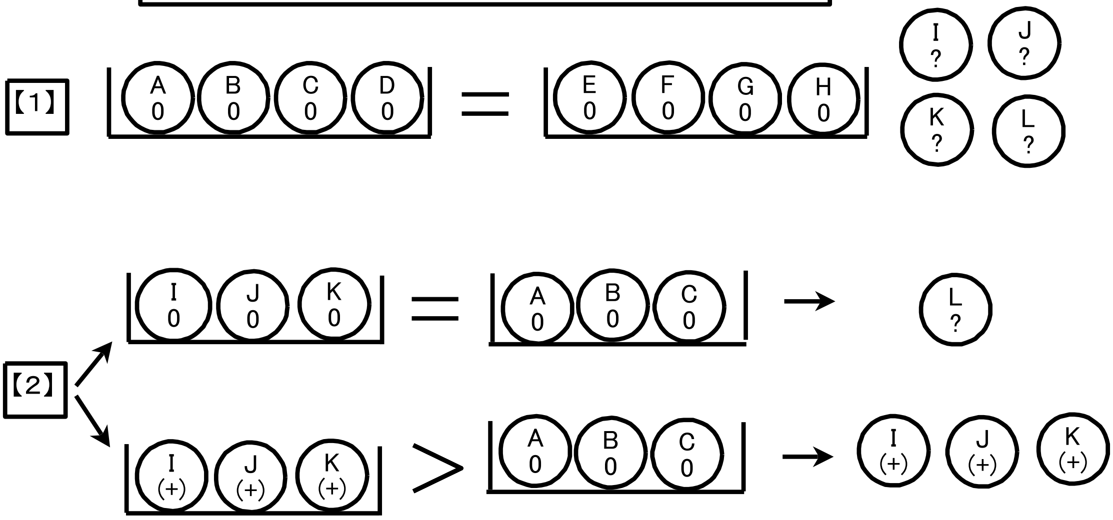
(カ)[A、B、C、H] ＞ [D、I、J、K] の場合、A、B、Cの中に重いのがある(I、J、Kは正常で、Hは軽いか正常、Dは重いか正常だから)。

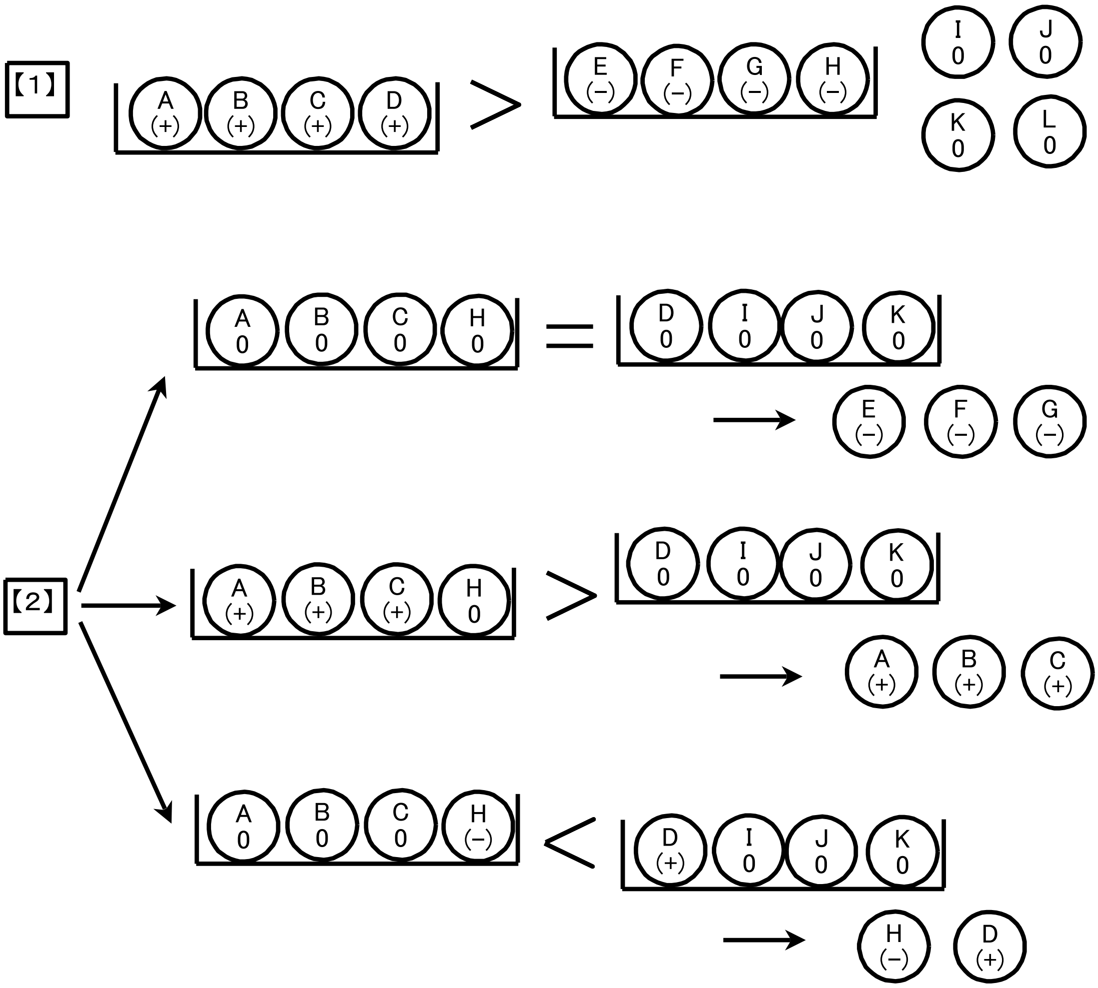
【3】AとBをのせればどれが重いか分かる(釣り合えばCが重い)。

(キ)[A、B、C、H] ＜ [D、I、J、K] の場合、Dが重いかHが軽い。

【3】D、Hのどちらかを他の正常のものと比べれば分かる。

アルファベットの下の記号
0：正常と確定、（+）：重いか正常、（-）：軽いか正常、？：不明





今のやり方の場合、(イ)の【2】の量り方がポイントになります。そもそも玉が3個でその中に異質なのものがあり、しかも重いか軽いか分かっていればあと一回で解決します。そのことを考慮して、A、B、C の3個(異質のものがあるとすれば重い)と E、F、G の3個(異質のものがあるとすれば軽い)をそれぞれグループにしています。ただこれだけではうまくいきません。厄介なのは残された D と H をどうするかです。D は異質なら重いと分かっているので、正常なもののグループ I、J、K と合わせてやると、もしもこちらが下がればそれは D が重いからかと考えられます。同様に H を重いものが含まれている可能性のある A、B、C のグループと合わせてやると、もしもこちらが上がった場合は H が軽いからかと考えられます。こうして、A、B、C の中に重いものがあるか、E、F、G の中に軽いものがあるか、D が重いか、H が軽いかを判定することが一度でできます。あとはいずれの場合も3回目で簡単に結論が出ます。(イ)の1回目で釣り合わなかった場合の2回目の量り方をどうするかが難しいです。最初に言いましたが、もっとスマートなやり方もあるかも知れません。

さて、最初に4個の場合を例に挙げましたが、4個の場合も12個の場合も必要な回数が同じ三回というのはどういうことでしょう。両方の解答をよく見比べると、12個の場合では一回目を行った時点で少なくとも4個以上の「正常な玉」が分かり、二回目以降にそれを上手く活用しています。4個の問題で、もしもそれ以外に「正常な玉」がいくつか(3個で十分)与えられていたら、二回で解決します。考えてみてください。

この問題を全く別の考え方で解決する方法を紹介します。結論から言うと三進法の数を利用します。§13 でp進法を取り上げていますので、○進法の意味がよくわかっていない人はそちらをご覧ください。三進法というのは登場する数字は0と1と2です。なぜなら、2より1大きい3になったら繰り上がるからです。0(十進法の0)から222(十進法の26)まで並べると次のようになります。

0	**1**	**2**	**10**	**11**	**12**	**20**	**21**	**22**
0	1	2	3	4	5	6	7	8
100	**101**	**102**	**110**	**111**	**112**	**120**	**121**	**122**
9	10	11	12	13	14	15	16	17
200	**201**	**202**	**210**	**211**	**212**	**220**	**221**	**222**
18	19	20	21	22	23	24	25	26

§13 の二進法の話では、二進法の数0と1を「ない」と「ある」に対応させて考えるという方法を用いていますが、ここでは三進法の0、1、2の三つの数を「軽い」、「重い」、「正常」の三つの状態に対応させてみます。0が軽いとか1が重いというように決めつけるわけではないので誤解なさいませんように。12個の問題に当てはめる前に、単純な問題で考えてみます。27個の玉があって、その中に1つだけ重いものが含まれているとします。この27個の玉に、上に表示した0から222までの三進法の数を対応させます。右側の桁(三進法の数として言うと一の位)も真中の位(同じく三の位)も左側の桁(3の2乗の九の位)も、0、1、2が9個ずつあることを確認してください。次のように天秤

にのせます。

注）今の話で三の位、九（3の2乗）の位という言い方が分かりにくかったかも知れないので少し説明します。我々が通常用いている十進法と比べてみます。十進法では用いる数字は0～9の十個です。十という数を表す記号はありません。9の次の数は繰り上がりとして10で表します（この工夫があったからこそ、用いる記号は十個で済んだ）。三進法では2の次の数は同じく繰り上がりとして10で表します。それで二桁目の1を三の位としたわけですが（十進歩の数3を使った）、もしも0、1、2しかない世界だったら（3という記号がなかったら）、三の位という言い方はありえないはずで、やはり10、これを十と読むとして十の位と言うべきかも知れません。

【1回目】左側の桁が0の9個を天秤の左側に、2の9個を右側にのせます。もし左が下がったら0、右が下がったら2、釣り合ったら1と記録します。
【2回目】真中の桁が0の9個を左側に、2の9個を右側にのせ、同じように記録します。
【三回目】右側の桁に関して同じようにやります。

0の側が下がれば、その桁が0の9個の中に重いものがあるはず（2の場合も同様）で、釣り合えば1の9個の中に重いものがあるあずです。従って、記録した数がたとえば012なら5番目の玉が重いと分かります。211なら22番目です。

どれかが重いと分かっている場合は（軽い場合も同様）、27個あってもこのように機械的に簡単に解決します。9個なら二回、81個なら四回です。一見すごいやり方と感じるかもしれませんが、実は一個が重い（あるいは軽い）と分かっている場合は、こんな話を持ち出すまでもなくもっと簡単に解決します。最初に9個ずつをのせて、どちらかが下がればその9個の中に重いのがあるので、3個ずつのせてとやれば、3回で解決します。最初に釣り合った場合も、残された9個の中に重いのがあると分かるので同様に3回で解決します。余談になりますが、玉が26個だったらどうしますか？正常なのを1個借りられれば問題ないですが、・・・。話がそれてしまいそうなので、ここでは考えないことにします。

さて、12個の問題で考えます。これは簡単にはいきません。重いか軽いか分からないので工夫が必要です。まず三進法で表した三桁の数を次のように並べます。

000	001	002	010	011	012	020	021	022	100	101	102	110	
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	111
222	221	220	212	211	120	202	201	200	122	121	120	112	

000から始まって111で折り返し、右回りに戻って222（27個）で終わります。上下の数を縦線で結んで13のペアーにしていますが、これらはどれも1はそのままで0と2を入れ変えた関係になっています。これからやることは、この13組のペアーからどちらかを 1 つずつ12個取り出して、三つの各位がどれも0と1と2が4個ずつになるようにします。表現が分かりにくいでしょうから、結果を書きあげます。

001　　010　　012　　021　　　　102　110

220　　211　　202　　200　122　121

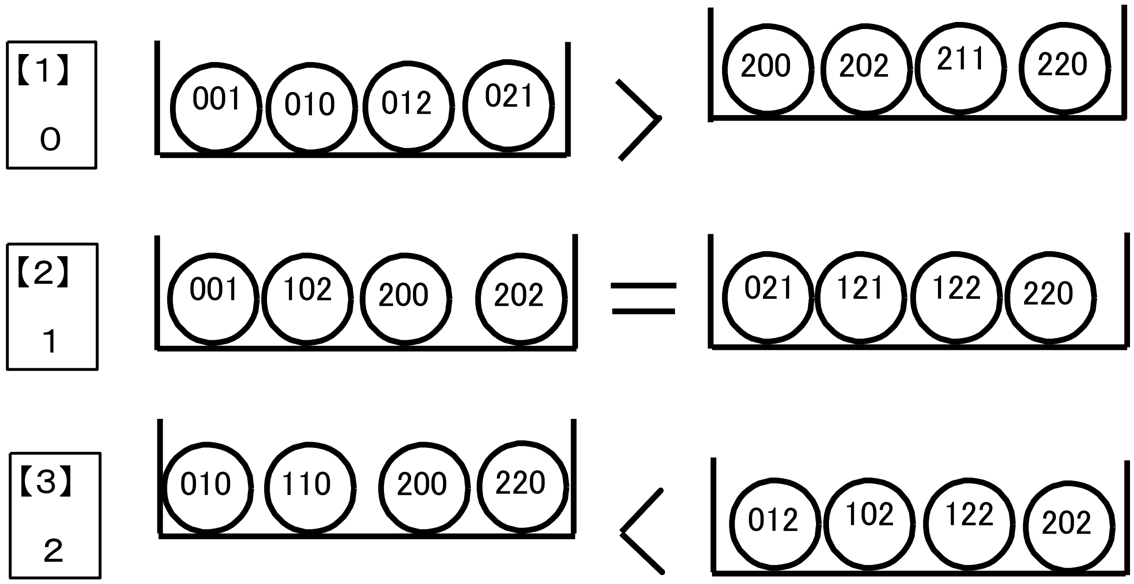
見やすく並べて書くと次のようになります。

001　010　012　021

102　110　121　122

200　202　211　220

この12個です。選び方は他にもいくらでもあります。左側の位も真中の位も右側の位も0と1と2が4個ずつあることを確認してください。12個の玉にこの12個の数を対応させます。あとは先程と同じように、各位において0の4個を天秤の左側に、2の4個を右側にのせます。



【1回目】(左側の位で)左(0のものをのせた方)が下ったとします。0と記録

【2回目】(真中の位で)釣り合ったとします。1と記録

【3回目】(右側の位で)右が下がったとします。2と記録

この場合は012の玉が重いと分かります。記録した数が100となった場合は上の数の中にありませんが、この場合はその数とペアーの関係にる122の玉が軽いと分かります。

12個の三進法の数を見つけるのに少々時間を要しますが(残念ながら上下上下と機械的ではない)、それさえ用意できればあとはそれこそ機械的に解決します。

三進法の数を利用できるという意味で、とても素晴らしい問題です。上に紹介したやり方は私の発案ではなく、ずいぶん昔に何かで見たものです。従いまして出典は明らかにできません。