§4. 窓は開け放つべきか

ある家での親子のやり取りです。親が子どもに向かって言いました。
『今日からおまえに小遣いをあげることにしよう。次の二通りのうちで、どちらの方法がよいか自分でよく考えて決めなさい。一つ目は毎日 100 円もらう。二つ目は毎日サイコロを振って1の目が出たら500円、2か3の目が出たら50円、4か5か6の目が出たら10円もらう。さあ、どちらの方法が良いかな』

ギャンブル好きの親のようで、あまり教育的とは思えませんが、あなたならどちらを選びますか。これは確率の分野の期待値（お金が関係するときは期待金額とも言う）に関わる問題です。

この問題の話を進める前に一つ面白い話を紹介しましょう。かつて筆者が高校の野球部の顧問をしていて、ある学校に練習試合に行ったときのことです。グランドが狭く、ネットもないので、大きな当たりが出たりすると、校舎にまで届いて窓ガラスを割ってしまうとのことでした。そして、その対策として、窓を全て開け放っていたのです。開けられたスペースをボールが通過すれば被害は 0 ですが、運悪く窓ガラスが重なった方にいけば当然二枚割れます。経験的にこの方が被害は少ないからというキャップテンの弁でしたが、あなたはどう思いますか。数学的にというより、おそらくおまじない的に（ひょっとして伝統で？）やっていたのでしょうね。結論から言うと、窓は開けていても閉めていても数学的に考えると被害は変わりません。ガラスが割れるのに期待値と言うのも奇妙ですが、一般に期待値は次のように計算します。

＜期待値＞

起こりうる場合がn通りあって、そのそれぞれの起きる確率が、p_1、p_2、p_3、・・・、p_n（当然、$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$）、そして、それぞれの場合の変数が x_1、x_2、x_3、・・・、x_n のとき、変数の期待値 m は

$$m=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+p_3\cdot x_3+\cdots+p_n\cdot x_n \quad \cdots \text{①}$$

である。

注） 期待値のことを平均値ということもある。

どうも数学的に表すと、難しいことのように感じられてしまいますが、具体的な例で話せばそう大したことはありません。窓枠内にボールが行ったとき、ガラスのないスペースと、ガラスが二重になった部分とで面積は変わりませんから、どちらをボールが通過する確率も 1/2 ずつです。また、この場合の変数は割れるガラスの枚数です。①にあてはめると、求める期待値は

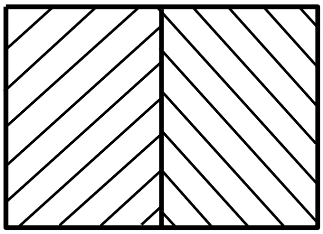
$$m=1/2\times0+1/2\times2=1$$

で 1 枚です。期待値に慣れる意味で、窓を半分だけ開けた場合で計算してみましょう。四つの部分からなり、それぞれの確率は 1/4 ずつ、ガラスの枚数は開いている方から順に 0、1、2、1 枚です。求める期待値は

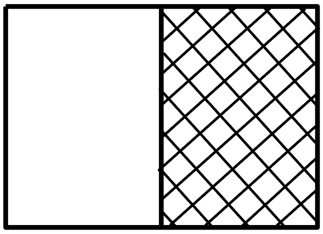
$$m=1/4\times0+1/4\times1+1/4\times2+1/4\times1=1$$

で、やはり１枚です。なお、ここでは話を単純にするために、窓枠の幅（面積）や格子の存在は無視することにしました。

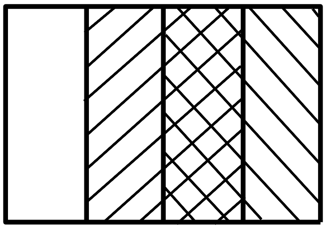
　余談になりますが、窓枠や格子も考慮するとどうなるのでしょう。気になる人は考えてみてください。計算上もしも差が出るようであれば、今からでも先ほどの高校の野球部に教えてあげてやりたいものです。



どこへいっても
＜1枚＞



0枚　　　　　2枚
1/2×0　　　1/2×2
＜1枚＞



0枚　　1枚　　2枚　　1枚
1/4×0　1/4×1　1/4×2　1/4×1
＜1枚＞

　さて、最初の小遣いの話に戻りましょう。500 円もらえる場合の確率は 1/6、同様に 50 円、10 円の確率はそれぞれ 2/6、3/6 です。従って、求める期待値 m は

m＝500×1/6＋50×2/6＋10×3/6

　＝630/6＝105

105 円になります。毎日 100 円もらうよりこちらの方が得だということになります。計算上は一日につき５円、すなわち 100 日後には 500 円程度得しているはずです。実際に何百日も続けてみれば、統計的に得であることが確かめられることでしょうが、その場で計算によって結論付けられるというのが、数学の素晴らしいところです。

　今の小遣いの話で、すぐに思い付くのが宝くじでしょう。一等〇億円が〇本、二等〇万円が〇本、･･･といううたい文句で客を引き付けますが、発券総数が知らされれば、100 円（200 円？）で買った 1 枚の宝くじ券の期待値がすぐに計算できます。一等の本数を発券総数で割れば一等の確率が求められますが、以下二等、三等、･･･の確率を求め、

　（一等の金額）×（一等の当たる確率）＋（二等の金額）×（二等の確率）＋･･･

　によって、期待値を求められます。私は買ったことも計算したこともありませんが、期待値が 100 円（あるいは 200 円）に満たない部分は、発売元の懐に入るというわけです。

　念のために付け加えます。それでは逆に期待値を計算して購入する額より大きければ、買った方がもうけにつながるかというと、そういうものでもありません。分かり易く極端な例で考えてみましょう。

『一等賞金がなんと１億円！はずれは無し。くじは一枚 1000 円で期待値は 1200 円』

　なんてくじ引きがあったら、なまじ期待値の意味を理解していたりすると、それなら損はないはずだと買いたくなってしまうでしょう。実はこのくじ引きの仕掛けは次のようになっています。くじの総数は 100000 枚で一等賞金 1 億円は 1 本、あとの 99999 本は賞金 200 円です。期待値を計算すると次のようになります。

100000000×1/100000＋200×99999/100000
＝1000＋199.998
≒1200（円）
これでは、くじを5本や 10 本買ったとしても損をしそうなことは目に見えています。一方同元の方も、万が一（十万が一）一等を引かれたら損するわけですが。
上の小遣いの例のように、サイコロを振るという試行を何百回も繰り返せば、サイコロの目が 1 から 6 までほぼ均等に現れるであろうことが推測され、期待値が意味を持ちます。