§3. 常識で理解できるか（人知を惑わす確率の問題）

この章では興味深い確率の問題をいくつか紹介します。

1）引き直しが有利か否か～TV のクイズ番組から

これは昔実際にあった話で、数学者を巻き込み論争になったことで有名です。いろいろな形で出されますが、本質的なところは変わりません。

元の問題 A］

5 個の箱があって、その中の 1 個にだけ当たりが入っている。解答者 P が 1 個引いた後（中はまだ見ない）、残りの 4 個から司会者 Q が 1 個を除外したとして、P は残りの 3 個から引き直すのが有利か否か。

注）P が「引き直す」とは、すでに引いた箱を放棄して改めて残りの 3 個から引くことを意味する。

解説］

ｉ）Q が除外する 1 個を無作為に選ぶ場合

（Q が除外した 1 個が当たりであろうがはずれであろうが）P が最初に引いた 1 個と Q が除外する 1 個と残された 3 個はどれも当たる確率は変わりません。従って引き直すことは意味はない（当たる確率は変わらない）。

たとえばこの 5 個の箱を 5 人が順番に引くとして、P、Q さらに残りの 3 人が当たる確率は引く順番に関係なく全て 1/5 です。たとえば三番目に引く人が当たる確率は、一人目がはずれ（4/5）、二人目がはずれ（3/4）、残りの三個から当たりを引く確率なので、

$4/5 \times 3/4 \times 1/3 = 1/5$

です。

ⅱ）Q が除外する 1 個をはずれであることを知って選ぶ場合

P が当たる確率は 1/5。従って、P が引いたあとの残りの 4 個に当たりが含まれる確率は 4/5、含まれない確率は 1/5。

P が当たっていた場合（確率 1/5）、Q がはずれの一個を除いた後の残りの 3 個から引いて当たる確率は（すでに当たりはないので）、

$1/5 \times 0/3 = 0$

P がはずれだった場合（確率 4/5）、Q がはずれの一個をのぞいた後の残りの 3 個（当たりの 1 個が含まれる）から引いて当たる確率は、

$4/5 \times 1/3 = 4/15$

従って、P が引き直して当たる確率は 、

$0 + 4/15 = 4/15 > 3/15 = 1/5$ （引き直した方がやや有利）

注）言うまでもなく、ｉ）であるかⅱ）であるかがはっきりしていなければ確率の問題としては成立しません。私は実際に見ていませんが、ひょっとするとクイズ番組ではこのあた

りを曖昧にしていたのかも知れません。もしもそうだとしたらひどい話で、解答者も視聴者も惑わされ振り回されていたに違いありません。(問題としてまずいと指摘しないのもまずいですが･･･)

補足 1] ⅱ)の場合で Q が 2 個除外した場合

4/5 × 1/2 ＝4/10＝2/5 です。さらに Q が 3 個除外した場合は、4/5 × 1/1 ＝4/5 です。

補足 2] ⅱ)の場合で 5 個の箱のうち当たりが 2 個だった場合

Ｐが当りを引いた場合、Q がはずれを 1 個取り除き残りの 3 個から当たり(1 個)を引く確率は

2/5×1/3＝2/15

Ｐがはずれを引いた場合、Q がはずれを 1 個取り除き、残りの 3 個から当たり(1 個)を引く確率は

3/5×2/3＝6/15

よって、P が引き直しで当たる確率は、

2/15＋6/15＝8/15＞6/15＝2/5 (引き直した方が有利)

補足 3] 箱が 10 個で当たり 1 個の場合で考えてみましょう。同様に P が 1 個引いた後、Q が次々とはずれと分かっている箱を除外したとすると、それぞれ当たる確率は、

Q が 1 個除外した場合 ･･･ 9/10 × 1/8 ＝9/80

Q が 2 個 〃 ･･･ 9/10 × 1/7 ＝9/70

･･･

Q が 7 個 〃 ･･･ 9/10 × 1/2 ＝9/20

Q が 8 個 〃 ･･･ 9/10 × 1/1 ＝9/10

P が最初に引いた 1 個が当たる確率は 1/10 で、最後に残った 1 個が当たる確率は 9/10 です。

このように考えれば、引き直すのが有利であることがよく分かります。ところで、Q が 8 個のはずれを除いた後の時点で、この現場に初めて登場した人がいたとします。その人はここに至る経緯を知りません。外見上なんら区別のつかない 2 個ある箱のそれぞれ当たる確率が Q 以外の(Q はどれが当たりか知っている)P を始めその場に居合わせた人たちには、1/10 と 9/10 であると分かるのに、1/2 ずつにしか見えないというのは考えてみれば奇妙な話です。ためしにその人が当たる確率を計算してみましょう。その人はそれぞれ 1/2 ずつの確率でどちらかの箱を選びます。

1/2×1/10＋1/2×9/10＝10/20

でやはり 1/2 です。

元の問題 B] (これが最初のというか本来の問題?)

3 個の箱があってそのうちの 2 個が当たり。P が引いた後、Q がどの箱が当たりであるかを知っていて当たりの箱を開ける。P は最初の箱を放棄して最後に残された箱を選ぶのは有利か不利か。

P が最初の箱で当たる確率は 2/3

最後の 1 個が当たる確率は

P が当たっている場合 ･･･ 2/3×0/1 ＝0

P がはずれている場合　・・・ 1/3×1/1 ＝1/3
従って、0＋1/3＝1/3 で不利。

2) 条件付き確率

事象 A が起きたという条件の元に事象 B が起きる確立を条件付確率と言って、$P_A(B)$ で表し次のように計算します。なお、A∩B と言うのは集合（§12）にも出てきますが、A と B が重なる部分、ここでは A と B が同時に起きることを意味します。

$P_A(B)＝P(A∩B)/P(A)$　　　注） $P(A∩B)＝P(A)×P_A(B)$ と考えると分かりやすい。

例 1〕 サイコロを振ったら偶数の目が出たという。目が 2 であった確率は？

解〕

A：偶数の目が出る

B：出た目が 2 である

$P(A)＝3/6＝1/2$、$P(A∩B)＝1/6$

$P_A(B)＝P(A∩B)/P(A)＝1/6÷1/2＝1/3$

注） 2 の目は 3 個ある偶数の目のうちの 1 個と考えれば納得できる。

例 2〕 P は A を出発してから B に到達するまでの間に、待ち構える三つのハードル（試練）H_1、H_2、H_3 をこの順で乗り越えなければならない。どのハードルも乗り越えられなければ、その時点でリタイアとなる。P はいずれのハードルも乗り越えることができる確率は 2/3 である。P は結局 B に到達できなかった。P がそれぞれのハードルでリタイアとなった確率は？

解〕

P が B に到達できる確率は、2/3×2/3×2/3＝8/27。従って、到達できない確率は、
1－8/27＝19/27。この条件のもとにそれぞれのハードルでリタイアした確率を求める。

H_1： 1/3÷19/27＝9/19　　　注）H_1 でリタイア

H_2： (2/3×1/3)÷19/27＝6/19　　　注）H_1 はクリアしたが H_2 でリタイア

H_3： (2/3×2/3×1/3)÷19/27＝4/19　　　注）H_1、H_2 はクリアしたが H_3 でリタイア

注）この問題は、その昔ある有名大学の入試問題で出題された。ただし題意はそのままで文章は変えてある。入試問題は確か、三軒の家を訪問して眼鏡を忘れるという（少々不自然な）内容だった。

3) 誕生日の一致

有名な「誕生日が一致する確率」の話の前に、次の例を見てください。

例〕

1 から 100 までの数字が書かれた 100 枚のカードがある。n 人が一人ずつ順番にその中からでたらめに一枚のカードを選ぶ（無作為に取り出してまた元に戻す）。少なくとも二人の数が一致する

確率が 1/2 を超えるのは、n がいくつ以上のときか。ただし計算には電卓を用いてよい。

解〕

一人目がある数を選ぶ。何でも構わないから 100/100

二人目の数が一人目と異なる確率は 99/100

三人目の数が前の二人と異なる確率は 98/100

・・・

n 人目の数が前の（n－1）人と異なる確率は（100－（n－1））/100

従って、n 人の数がことごとく異なる確率は

1×99/100×98/100×・・×（101－n）/100

電卓で、$\boxed{.99}$×$\boxed{.98}$×$\boxed{.97}$×$\boxed{.96}$×$\boxed{.95}$×$\boxed{.94}$×$\boxed{.93}$×$\boxed{.92}$×$\boxed{.91}$×$\boxed{.90}$×$\boxed{.89}$×$\boxed{.88}$

と計算していくと、

・・・×$\boxed{.90}$＝0. 56・・・

・・・×$\boxed{.90}$×$\boxed{.89}$＝0. 50・・・

・・・×$\boxed{.90}$×$\boxed{.89}$×$\boxed{.88}$＝0. 44・・・

になります。 101－n＝88 より、n＝13。つまり、13 人目でことごとく異なる数である確率が 1/2 を下回ります。ということは、誰かしらが一致する（三人以上が一致すかも知れないし、一致するペアーが二組以上あるかも知れない）確率が 1/2 を上回ることになります。そうなる可能性の方が大きくなるのです。

この問題は実は「誕生日の一致」として良く知られた問題です。筆者はかつて高校の教師をしていましたが、生徒の一覧表などを作っていてしばしば不思議に感じたものです。たとえば 45 人程度のクラスで生年月日を記録をしていると、○月○日がよく一致するのです。ときには三人が、またときには何組も。誕生日は 365 通り（閏年ではないとして）あるわけですが、上の問題のように n 人がことごとく異なる日に生まれた確率を計算すると、

1×(364/365)×(363/365)×(362/365)×・・・×（365－（n－1））/365

n＝23 でこの値が 1/2 を下回ります。つまり、23 人集まると、一致することの方が起きやすくなるのです。365 通りに対して 23 人というのは意外です。45 人もいたら、相当起きやすくなるのは当然だった訳です。

この問題では、考え方において重要なことがあります。聞かれているのは「少なくとも二人が一致する確率」ですが、これをまともに解こうとすると、二人が一致する場合、三人が一致する場合、・・・、また一致するペアーが一組の場合、二組の場合、・・・と大変なことになってしまいます。上で示したように、ことごとく異なる場合を考えて、その確率を 1 から引くというのが、上手い簡単な方法です。

4）問題文に問題アリの問題

かつて高校の授業で、余った時間に余談として冗談まじりに話した問題が、意外なことに数十年を経て再会したある一人の生徒から、ずっと引っかかっていますと言われたのがこの問題です（実

は数学の問題とは言い難い）。

袋の中に赤玉2個と白玉3個が入っている。

①無作為に1個取り出すとき赤玉である確率は2/5（ここまでは問題ナシ）。

②袋に手を突っ込むと仕切りがあってAとBに分かれる。Aには赤玉1個、白玉1個が、Bには赤玉1個、白玉2個が入っている。手を突っ込んだ者がAかBかを選ぶ確率は1/2ずつとする。1個取り出すとき、赤玉である確率は、

$1/2\times1/2+1/2\times1/3=5/12$

問題はここから。①と②では確率が異なるが、仕切りがどの高さのときから①と②の違いが生じるか。

この問題のどこに問題があるのか考えられたし。