§2. 背に天使の羽は生えたか（見えないものを推理する）

落語の登場人物と言えば、よく聞くのが「八っつぁん」と「熊さん」です。二人ともお人好しで抜けたところがありますが憎めないキャラです。さて、この二人が登場する物語です。落語を聞くようにではなく、少し心してお読みください。

『 事情はさておくが八っつぁん（以下、ハチ）と熊さん（以下、クマ）の二人がそろって昇天した（天国に召された）。そして雲の上で二人は神様に出会った。神様は二人に声を掛けて次のように話した。

「お前たちがここで心を改めれば、いつか背に天使のごとく羽が生えるかもしれん。そしてもしも羽が生えたら地上に舞い戻ることができるぞ。だが背に羽が生えたかどうかは自分には見ることができん」

ある朝、ハチはクマの背に羽が生えているのを見た。神様が言ったように自分の背にも生えたかはわからない。クマに聞きたいところだが、クマが正直に答えてくれるか分からないし、第一そんなことをしたら、ひょっとして羽が生えたかと勘繰られてしまう。クマに生えたことを教えるようなものだ。クマだけ地上に戻るなんてとんでもないことだ。

このとき実はハチの背にも生えていて、それを見たクマもハチとまったく同じことを考えていた。そんな二人を見ていた神様はハチを呼んでそっと教えた。

「お前たち二人の少なくとも一人の背に羽が生えたぞ」

それを聞いたハチは考えた『現にクマの背に生えたのだから、そんなことを聞いても何のヒントにもならない』。

神様はクマにもそっと同じことを教えていた。そしてクマもハチ同様に何のヒントにもならないと考えた。二人とも相手に教えようとせず聞こうともせず、自分の背に羽が生えたかは分からないままだった。いつまでたっても二人はお互い自分の方から話そうとせず、とうとうその日が暮れてしまった。

翌朝神様は二人を呼び寄せた。そして二人を前にして昨日それぞれに話したことと全く同じことを言った。「お前たち二人の少なくとも一人の背に羽が生えたぞ」。

二人は顔を見合わせた。やがて二人はほとんど同時に自分の背に羽が生えたことを悟った。そして我先にと雲から飛び降り地上を目指した。

＊　　＊　　＊　　＊　　＊

神様はつぶやいた『二人ともどうしてこうなるまえに、相手に教えてあげようとしなかったのだ』。地上に舞い降りていく二人の背の羽が見る見るしぼんでいった。『やはり羽は一日しかもたなかったか。二人とも昨日のうちに分かっていれば・・・』。

』

さて、この物語は何を言いたいのでしょうか？神様は「少なくとも一人の背に羽が生えた」とそれぞれにヒントを与えました。ところがそれは二人にとって何のヒントにもなりえませんでした。ところが、二人を前にして同じことを言うと、二人はすぐに思い当りました。少なくとも一人に生えたのだから、

もしも自分の背に無ければ相手は「自身の背に生えた」と直ちに分かるはずです。従って、相手が直ちにではなくためらう様子があったとしたら、それは自分の背に生えたからに他なりません。二人ともしばらく顔を見合わせて、ほとんど同時にこのことを悟ったのです。

ここでのポイントは「情報の共有」、つまりこの話で言うと、「少なくとも一人生えた」ことを相手も知っている、ということを知れたことにあるのです。ハチもクマも『何のヒントにもならない』と考えたのは、相手がこの情報を知っているか分からなかったからです。

（余談になりますが、神様が最初に個々にヒントを与えたのは、上に書いたようなことを知ってか知らずでか。もしも知ってやったとしたら、意地悪というかとんでもない神様です！いや、神様としては、二人が相手に教えてあげるという思いやりの心が備わったかを試そうとしたのでしょう）。

さて、ここからが本題です。数式が何も登場しない国語の問題のようですが、これも論理的な思考を要する数学の問題です。とても有名な問題で、いろいろな出し方をされているようです。既に問題を知っていたという人も、改めて考え方を整理して理解を深めると良いでしょう（いずれもしも天に昇ることがあったときのために・・・）。

問題〕 雲の上で神様が三人（かつて罪人として天に召された）を前にして言った。

「心改まった者の背には天使のごとく羽が生えたかも知れん。自分の背に羽が生えたと確信できたら舞い降りるがいい、地上に戻ることができる。生えてもいないのに飛び降りたらどうなるか、言わなくても分かるな。ただし、背に羽が生えたかどうかは自分には分からない。さあ、お互い他の者の背を良く見るがいい。少なくとも一人の背に羽が生えているぞ」

実は三人全ての背に羽が生えていた。三人ともはたして自分の背に羽が生えたかどうかはすぐには分からなかった。しかし、しばらくすると一人が自分の背に生えたことを確信し、悠然と地上を目指して舞い降りていった。どうしてこの人物は自分の背に羽が生えたことが分かったか。

まずはじっくり考えてみてください。場合によっては一晩くらいかけて。いや、一晩くらいで答が導けたとしたら、それはとても素晴らしいことです。導いた答が正しいか否かは、他の誰をも納得させる説明ができるかどうかとお考えください。

それでは解答を示します。他にも説明の仕方があるかも知れませんが、以下に示す説明が恐らく誰をも納得させやすいものであろうと思われます。

解答〕

「少なくとも一人生えた」という条件から、三人の背の状態として考えられるのは、次の三通りです。

ⅰ）一人だけ羽がある

ⅱ）二人に羽がある

ⅲ）三人とも羽がある

実際はⅲ）なのですが、どうしてⅲ）だと分かったのかを説明するのが問題です（それが言えれば、自分にも羽があると確信できるから）。結論から言うと、ⅰ）でもⅱ）でもないということが言えれば良いのです（そうすればⅲ）でしかない）。

まずⅰ）ではないこと。これは簡単です。羽があるのは一人だけなので、その人から見れば他の二人は羽が無いわけで、自分は間違いなく羽があると直ちに分かります。しばらくの時間は要りません。

次にⅱ）ではないこと。これが言えれば終わりです。羽がある人が二人いるわけですが、その一人の立場になってみます。その人から他の二人を見ると、一人は無しで一人が有りです。そこで有りの人の様子を見ます。その人からも一人は無しで一人が有りと見えています。つまりこの二人は無しの一人を除外して二人でお互いの様子を見合います。もうお分かりでしょう。この状況はまさしく最初に紹介した「八っつぁん」と「熊さん」の物語に他なりません。その際問題となった「情報の共有」もしています。従って、しばらくの時間を要してもだれも分からないとしたら、このⅱ）でないことも分かります。

つまり結論はⅲ）ということになります。

この問題は、「青い帽子が三個と赤い帽子が二個あって、三人とも青をかぶせる、どうして自分の頭が青と分かったか」という出され方もよくされます。赤が二個ということは、三人の少なくとも一人に青をかぶせるということになり、上の羽の問題と同じであることが分かります。

興味深い内容なのでもう少し発展させてみましょう。まず人数が四人になった場合どうなるかですが、話を少し変えることにします。ここまで背に生える羽で進めてきましたが（判断は命がけという意味合いを持たせるために筆者が作問した）、人数が増えてくるとお互い背中を見せっこするのは手間が掛かるし不自然です。そこで赤のシールと白のシールをたくさん用意して、本人には色が分からないようにおでこに貼ることにします。これなら全員で輪を作ればそれぞれが簡単に見渡せます。問題は、全員に赤を貼って「少なくとも一人のおでこは赤である。自分のおでこが赤と分かったら申し出なさい」とします。

さて四人の場合、「少なくとも一人は赤」の条件のもと起こりうるのは、

ⅰ）赤一人で白三人

ⅱ）赤二人で白二人

ⅲ）赤三人で白一人

ⅳ）四人とも赤

の四通りです。ⅰ）～ⅲ）が否定されればⅳ)であることが分かり、誰もが自分は赤と言えます。ⅰ）～ⅲ）において、赤の人は（まだ自分の色は分からないまでも）、白の人を無視して赤の人だけを相手にします。上の問題の解答にあったように、ⅰ）、ⅱ）はすぐに分かり、ⅲ)も白を無視した三人で考えれば、しばらくの時間を要した後に分かることは、すでに三人の場合で示されています。従って、さらにしばらくの時間がたっても誰も赤と言わなければ、このケースでもない、即ちⅲ）が否定され、ⅳ)であるという結論になります。

＊　　　　　　＊　　　　　　＊　　　　　　＊

（これより先、数学的帰納法を用います。§14 を読んでからまたここへ戻ってください）

この話は、理屈の上では五人の場合でも六人の場合でも・・・、何人の場合でも言えることになります。実はこうした話こそ§14 の数学的帰納法が威力を発揮します。

試しにやってみますが、「数学的」にするために、あいまいな言い方だった「しばらくの時間」を約束することにします。N 人の場合、1 秒ごとに N 秒後まで「分かった人？」と聞くことにします（1 秒で足りなければ、2 秒ごとでも 10 秒ごとでも構いません）。

一つ確認ですが、ここに登場する N 人は全員が以下に説明する考え方を理解できるものとします。一人でも理解不能の人物がいると問題が成立しなくなります。このことは二人の場合、三人の場合も同様だったのですが。

ⅰ）N=1 のとき（一人のおでこに赤を貼る）

1 秒後に「分かった人？」と聞かれて、少なくとも一人は赤のはずなので「自分は赤」と答えられます。

ⅱ）N＝K のとき（K 人とも赤を貼る）

K 秒後に「分かった人？」と聞かれて、誰かが（上に書いたことわりからすれば全員が同時に）「自分は赤」と答えられたとします。

N=K+1のとき（K+1 人とも赤を貼る）

一人の人間の立場に立ち、自分が白だとします。自分以外の K 人はみな赤のわけですが（この K 人は白の自分を除外して K 人だけで考える）、帰納法の仮定から K 秒後には誰かが（全員が一斉に）「自分は赤」と答えるはずです。誰も答えなかったとすれば、それは自分が白でないから。K+1 秒後に「分かった人？」と聞かれて「自分は赤」と答えられます。

ⅰ）、ⅱ）より、すべての自然数 N に対してなりたちます。

たとえば五人いて三人に赤を貼り二人に白を貼った場合、白を貼られた二人を除外して三人で考えるはずですから、3 秒後に赤を貼られた誰かが（思考能力に差がなければ三人同時に）「分かった」と言うはずです。N 人の場合でも M 人に赤を貼り残りの N－M 人に白を貼ると、M 秒後に赤の M 人が一斉に分かったと答えるでしょう。