§28. 自然数を無限に足していくと不思議なことが起きる（1＋2＋3＋4＋・・・）

電卓で、4÷33を計算してみてください。

4/33＝0.12121212・・・

となります。逆に循環小数（無限に続く）

S＝0.12121212・・・

を考えます。Sに対して100×Sを作り、そこからSを引いてみます。

$$
\begin{array}{rrl}
 & 100\times S = & 12.121212\cdots \\
-) & S = & 0.12121212\cdots \\
\hline
 & 99S = & 12
\end{array}
$$

従って、S＝12/99＝4/33。この話は経験があるという人は多くいるでしょうが、循環小数はこのようにすればいつでも分数で簡単に書き表すことができます。この先このような話が出てくるのですが、それを読むと、今やった計算がとても大変なことをしているということを認識できるでしょう。何しろ、無限に続く者同士を引き算でバッサリ消しています！

次に、

$S=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$

において、Sを簡単に表せないか考えてみます。この等式の両辺にxを掛けて、元の式と並べてみます。その際 x°がそろうように右に少しずらします。引き算をすると、S の一番目と xS の最後（n番目）を残してそれ以外が全て消えてしまいます（§27 でもやりました）。

$$
\begin{array}{rrl}
 & S = & 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n \\
-) & xS = & \quad\;\; x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+x^{n+1} \\
\hline
 & S-xS = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -x^{n+1}
\end{array}
$$

従って、

$S=(1-x^{n+1})/(1-x)$　　・・・ ①（ただし、$x\neq1$）

ここで話を一旦ストップして、x^nについて考えます。電卓を用意してください。普段あまり活用しないと思いますが、電卓には次のような機能があります。

2$\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

とすると、2を二回掛けたことになり4になります。ですから、

2$\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$　（ $\boxed{\times}$ のあとに $\boxed{=}$ を9回）

とすると 2^{10} で 1024 です。このやり方で、1.1^{10}、1.1^{20}、1.1^{50}、・・・を計算してみてください。調べたいことは 1 より少しだけ大きい数でも、何回も掛け合わせるといくらでも大きくなるということです。ちなみに 1.1^{50} で 117.39・・・です。

注）早くに右肩の数（指数という）を大きくしたければ、

1.1 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ ・・・

とした方が早い。1.1 のあとに $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ のペアーを 6 回繰り返しただけで、（一回押すごとに元の数の 2 乗、4 乗、8 乗、16 乗、・・・となるので）1.1^{64} を計算したことになる。ちなみに $1.1^{64}=445.79\cdots$。

同じやりかたで今度は 0.9（1 より少しだけ小さい数）で 0.9^{50} を計算してみてください。0.0051・・・となります。確認したかったのは、x^n において、x が少しでも 1 より大きいと n を大きくしたとき、x^n はどんどん大きくなること、x が少しでも 1 より小さいとどんどん 0 に近づいていくことです。x が 1 の場合はいつまでも 1 です。

さて、元の話に戻ります。1 から x^n までの和 S において、$0\leqq x<1$ のとき、n を限りなく大きくすると、x^n は限りなく 0 に近づきます（x^{n+1} でも同じ）。数学では和を無限に続けることを無限級数と言いますが、次のような表し方をします。

$0\leqq x<1$ のとき

$S=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots=1/(1-x)$　・・・ ②

注）x の条件を $0\leqq x<1$ としたが、$-1<x\leqq 0$ でも n を限りなく大きくすると き $x^n\to 0$ となるので、ふつうは x の条件は $|x|<1$ のとき、とする。

注）大学で習う Taylor 展開では、$|x|<1$ のとき、

$1/(1-x)=1+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$

である。

高校の理系で数学を学習した人なら、②の両辺を微分して、

$1/(1-x)^2=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$　③

とできます。

中学生の場合は次のように計算してみましょう。②の（左右を入れ替えて）両辺を二乗します。右辺は無限に続く者同士の掛け算ですが、規則性をつかむために最初の方だけ見ています。

$$
\begin{aligned}
1/(1-x)^2 &= (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots)\times(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots)\\
&= 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots \qquad (1\cdot(1+x+x^2+x^3+\cdots))\\
&\quad +x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots \qquad (x\cdot(1+x+x^2+x^3+\cdots))\\
&\quad +x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots \qquad (x^2\cdot(1+x+x^2+x^3\cdots))\\
&\quad +x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots\\
&\quad +x^4+\cdots+x^n+\cdots\\
&\quad \cdots\\
&= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+(n+1)x^n+\cdots \qquad ④
\end{aligned}
$$

この④を用いて奇妙な等式を導きます。インドの数学者ラマヌジャンが示したと言われる（他の数学者の名も挙げられることがある）次の無限級数です。自然数を全て加えていくものでTで表すことにします。

$T=1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots$　において、Tに -4 を掛けたものを 1 つずつ間をあけて元のTと加えます。

$$
\begin{array}{rl}
T= & 1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots \\
+)\ -4T= & \quad\ -4 \quad\ -8 \quad -12 \quad -16 \quad \cdots \\
\hline
-3T= & 1-2+3-4+5-6+7-8+9-\cdots \quad ⑤
\end{array}
$$

先程の④において $x=-1$ とすると(※)、左辺は、$1/(1+1)^2=1/4$。従って、

$$1/4=1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots$$

⑤と合わせると、

$$-3T=1/4$$

よって、

$$T=-1/12$$

よって、全ての自然数の和は $-1/12$!?

とてつもなく奇妙な話です。どんどん大きくなる正の数を無限に加えていったのに負になるとは！実はここに示したやり方には「禁じ手」(将棋の「二歩」のような基本ルールに反すること)を使ったところがあります。(※)のところです。②の式の下の注)にあるように、②の式は $|x|<1$ のときという条件が付いています。それを $x=-1$ として用いたのがいけなかったのです。

この話は興味深い内容なので、「禁じ手」を用いるのを承知でよく紹介されます。実は他にもまずい個所があるのでついでに知っておきましょう。⑤の $-3T$ の式を改めて P とします。

$$
\begin{array}{rl}
P= & 1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots \\
+)\ P= & \quad\ 1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots \\
\hline
2P= & 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots
\end{array}
$$

ところで、

$$2P=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

よって $P=0$。また、

$$2P=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1$$

よって $P=1/2$。

このように無限級数においては足す順番を変えたり、無限級数同士を足したり引いたりすると奇妙なことが起こります。ということは、安易にそのような計算をしてはいけないということになります。従って、⑤の等式を導く過程もまずいと言えるでしょう。

それではラマヌジャンはインチキな等式を示したのかと言うと、決してそんなことはありません。ハイレベルな数学の分野や物理の「弦理論」という分野(私には分からない！)ではこの等式
『 $T=-1/12$ 』が非常に重要な意味を持っているというのです？？？。

興味のある人は Net でラマヌジャンを検索してみてください。とてつもない数学者であることが分かります。