§27. 限りなくゆっくりとした無限（1＋1/2＋1/3＋1/4＋・・・）

あらかじめお断りしておきますが、本章では途中から§22 の『対数』が登場し、さらには§23 の『微分』、§24 の『積分』が使われます。

数学における「無限」というのは、いろいろ興味深い話題を提供してくれます。無限に関する話題で有名なものと言えば「アキレスと亀」の話でしょう。よく知っているという人も多いでしょうが、聞いたことがないという人のために簡単に触れておきます。紀元前 400 年頃の話です。ギリシャの数学者（哲学者）のゼノンという人が次のような問題を提起して、当時の数学者たちを悩ませたという話です（Net で調べると、現在でもこの問題に関して議論を展開しているページを多く見かけます）。俊足の代表であるアキレスが鈍足の代表である亀を追いかけるのですが、アキレスは亀に追いつくことはできない、という話です。

「ある距離（x_0とする）を隔てて両者が同時にスタートしてアキレスが亀を追いかける。アキレスが距離 x_0を走って最初に亀がいた地点に到達するには、いくら俊足とは言えいくらかの時間が掛かる（t_1とする）。するとその t_1の間に亀はいくら遅速とは言えいくらか前進する（x_1とする）。アキレスは距離x_1を走るのにまたある時間が掛かる（t_2とする）。またその間に亀は前進する（x_2）。またアキレスは・・・。このことは際限なく繰り返される。従ってアキレスはいつまでたっても亀に追いつき追い越すことはできない！」

これと似た話になりますが、もっと分かり易い数式で例を示します。

1＋1/2＋1/4＋1/8＋1/16＋・・・

無限に続くこの式はどうなるでしょう。小さくなるとは言え、プラスの数を無限に足すのだから値はどんどん（限りなく）大きくなる？この式はある具体的な話に当てはめると見当が付きます。長さ2のようかんを用意します。最初は半分の 1 を食べます。次に残りの半分つまり全体の 1/4 を食べます。次にまた残りの半分つまり 1/8、以下同様に 1/16 、・・・と食べていくと、ようかんはどうなるでしょうか。ようかんがどこまでも際限なく小さく切り分けられるとしての話ですが、残りは限りなく0 に近づいていきます。つまり上の式は元のようかんの大きさ 2 に近づくであろうことが分かります。それではようかんのことは忘れて、この式を数学的に考えてみます。和を S とします。

S＝1＋1/2＋1/4＋1/8＋1/16＋・・・ ①

S は無限に続く和ですが、一番目から n 番目までの和を S_nとします（最後の項は分母が 2^{n-1}）。そして S_nから $S_n/2$ を引き算します。

$$
\begin{array}{lrl}
 & S_n = & 1+1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots+1/2^{n-1} \\
-) & S_n/2 = & \phantom{1+{}}1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots+1/2^{n-1}+1/2^n \\
\hline
 & S_n/2 = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1/2^n
\end{array}
$$

$S_n = 2(1-(1/2)^n)$

$n \to \infty$ のとき、$(1/2)^n \to 0$ なので、$S_n \to 2$ です。つまり、S の値は 2 に近づきます。『$n\to\infty$ のとき $S\to2$』という言い方をします。

上のアキレスと亀の例では、時間そのものの和が限りなくある値に近づきます。従って追いつけないということはありません。ギリシャ時代の数学では無限に加えるという話に上手く

対応できなかったのです。

一般に、一番目の項がａで次々に掛かる一定の比の値をｒとするとき（ａを初項、ｒを公比という、上の例では初項 1、で公比が 1/2）、

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$

となりますが、上でやったのと同じやり方で両辺にｒを掛けて引き算することによって、

$(1-r)S_n = a - ar^n$

$S_n = a(1 - ar^{n-1})/(1-r)$

と求められます。ここで、公比の ｒ について考えてみます。結論から言うと、$-1 < r < 1$ のとき、$r^{n-1} \to 0$ です。直感的に承服しがたければ電卓で確かめてみるとよいでしょう。

0.9×＝＝＝･･･としてみてください。どんどん 0 に近づきます。0.99 でやるとかなりゆっくりですがやはり 0 近づきます。マイナスの場合は＋と－を繰り返しながらやはり 0 に近づいていきます。

逆に、$r > 1$ の場合、1.1×＝＝＝･･･とすると、どんどん大きくなります。$r < -1$ のときは＋と－を繰り返しながら、絶対値がどんどん大きくなります。

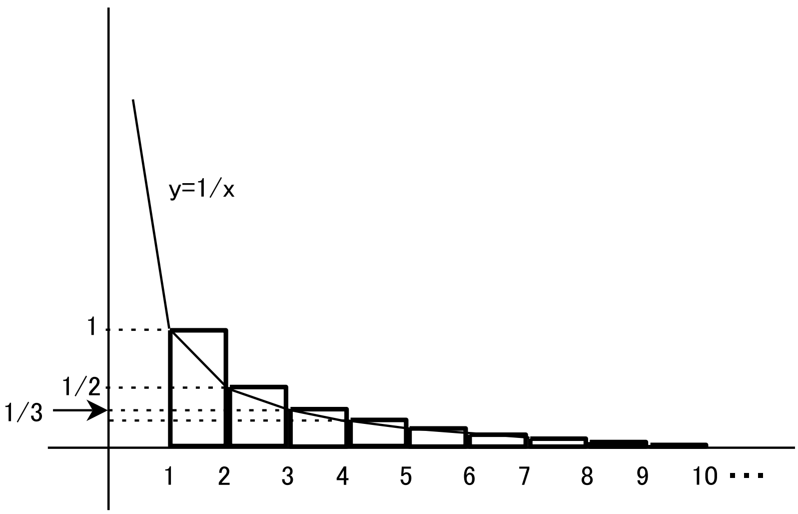
以上のことから、次のことが言えます。

『$-1 < r < 1$ において、$n \to \infty$ のとき、$r^{n-1} \to 0$ なので、$S_n \to a/(1-r)$』

さて、それでは本題に移ります。

$S = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots + 1/n + \cdots$ ②

という自然数の逆数の和がどうなるか。先ほどの①はプラスの数を無限に足していっても２という値にしかなりませんでしたが、結論から言うと、②は無限大になります。ただあまりにもゆっくりと大きくなっていくので、本当に無限大になるのだろうかと心配になります（このことに関してはのちほど）。②が無限大になる訳は次のような分かりやすい説明の仕方がよく知られています



$1 + 1/2$ はそのまま置いておいて、

$1/3 + 1/4 > 1/4 + 1/4 = 1/2$

$1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 > 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$

$1/9 + \cdots + 1/16 > (1/16) \times 8 = 1/2$

･･･

$S > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \cdots$

不等式の右辺は、1/2 を限りなく足すことになるので、無限大になります。従って、それよりも大きい S も無限大になります。

それではこの S がどれくらいゆっくり無限大になるか見ていきます。まず、S を図のように長方形の面積の総和で表します（見やすくするために y 軸方向に 2 倍に引き伸ばしている）。次に、

$y = 1/x \ (x \geqq 1) \cdots$ ③

のグラフを描き加えます（図では折れ線になっているが実際はなめらかな曲線。小学生のころ習った反比例のグラフ）。S の面積（長方形の面積の総和）は図から明らかなように、③のグラフと x 軸との間の面積（S_1 とする）より大きいです。

この面積 S_1 は§25 の積分で計算できます。ここでは§24 の微分を使って話を進めます（積分が微分の逆であることを使う）。

$\log_e x$ の微分を求める

$(\log_e(x+h) - \log_e x)/h$

$= (\log_e(x+h)/x)h$

$= (\log_e(1+h/x))/h$

$= (1/x)\cdot(x/h)\cdot\log_e(1+h/x)$　　注）$1/h = 1/x \cdot x/h$ とした

$= (1/x)\cdot\log_e(1+h/x)^{x/h}$

$x/h = n$ とする。$h/x = 1/n$ であり、$h \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ になる。

上の式は、

$= (1/x)\cdot\log_e(1+1/n)^n \quad (n \to \infty)$

$= (1/x)\cdot\log_e e$　　注）$(1+1/n)^n \to e \ (n \to \infty)$（§22）

$= 1/x$

よって、$\log_e x$ の微分は $1/x$ になります。ということは、$1/x$ の積分は $\log_e x$ です。従って、$y = 1/x \ (x \geqq 1)$ と x 軸との間の面積 S_1 は、

$S_1 = \log_e x \quad (x \geqq 1) \cdots$ ④

で表されることになります。

ところで、$y = \log_e x$ のグラフは x を大きくすればいくらでも大きくなります。つまり無限大になります。ということは、$y = 1/x$（ただし、$x \geqq 1$）のグラフの下の部分の面積 S_1 が無限大になるので、それより大きい S が無限大になることが示せたことになります。

何故、少しレベルの高い数学をわざわざ使って示したかと言うと訳があります。

$y = \log_e x$ を指数で書き換えると、

$x = e^y \ (x > 1$ で $y > 0)$

です。ここで、x と y を入れ替えると、

$y = e^x \ (x > 0, y > 1) \cdots$ ⑤

④と⑤のグラフを同じ座標平面に描くと、両者は直線 $y = x$ に関して対称なグラフになります。

注）一般に元の関数に対して、x と y を入れ替えて得られる関数を逆関数という。両者のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称になる。たとえば、④で $x = e$ のとき、$y = 1$ であり、⑤では $x = 1$ のとき、$y = e$ である。

§15 で、$y=2^x$ のグラフが猛烈な勢いで大きくなるのを見ました。たとえば、$x=19$（cm）で、y は富士山より高い値になりました。e は 2 よりも大きい値でしたから（$e=2.718\cdots$）、⑤は $y=2^x$ のグラフよりもっと凄い勢いで大きくなります。ということは、④のグラフがいかにゆっくりと大きくなるかが分かります。たとえば、$x=e^{10}=(2.718\cdots)^{10}\fallingdotseq 22000$ のとき、y はまだ 10 です。x が太陽までの距離（1.5 億 km）に行ったとしても、y は 30cm 程度です。

注）例によって PC の関数電卓で計算すると、
1.5（億 km）＝150000000（km）＝150000000000（m）
＝15000000000000（cm） を入力した後、$\boxed{\text{ln}}$を押す（$\log_e x$ の意味）。結果は、$y=30.339\cdots$（cm）。

このようにも遅々とした増加が、本当に無限大になり得るのかと心配になります。

（余談を挟みます。とばしてもかまいません。目の前に転がっている石ころを見て考えるのですが、この石ははたしてどれくらいの数の原子で出来ているだろう？とてつもない数であろうことは理科で学びます。それからすると地球全体の原子の数は？気の遠くなるような話です。でも勿論有限です。本当に②の式はそれを超えるような数になるのだろうかと心配になります）

でも次のように考えると、心配しなくても良さそうだという気になります。対数には次のような性質（公式）があります。

$\log_e e=1$

$\log_e A^n=n\log_e A$

従って、

$\log_e e^n=n\log_e e=n$

ですから、n に任意の（好きなだけ大きな）数を入れて、$\log_e x$ の x を e^n とすれば、

$\log_e x$ の値は n になります。つまり、$\log_e x$ の値はいくらでも大きくなります。ただし、そのときの e^n はとてつもなく大きな数になっていることは言うまでもありません。