§26. πと同じように重要な数 e(ネイピア数)

ここでは数学において非常に重要なある数を底とする指数関数を取り上げるのですが、その中で『対数』と『微分』を使います。従いまして、この先を読むには§23 と§24 を前もって読む必要があります。

さて、それでは上の二項目を読み終えたものとして先へ進みます。内容的には高校の理系の数学で登場する事柄ですが、中学生にも理解できる説明を心掛けつつ進めていきます。

(「非常識な」と思われるかもしれませんが、考えてみれば我々は小学生のころから半径 r の円の面積が πr^2 であるとか、球の体積が $4\pi r^3/3$ であるとか、すごいことを習っています。これらに関してもきちんと説明できるのは、やはり高校の理系の数学です)

§15 で指数関数が登場しましたが、ここでは次の①と②を元に考えます。

$y=2^x$ ・・・ ①

$y=3^x$ ・・・ ②

①のグラフの $x=0$(y 軸との交点)における接線ですが、傾きは 1 より小さそう(45°より小さそう、実際は 0.693・・・)です。一方②のグラフの $x=0$ における接線の傾きは 1 より大きいです(実際は 1.098・・・と微妙)。ということは、その中間に $x=0$ における接線の傾きがちょうど 1 になるようなグラフの指数関数があるはずです。そこで今からそのような指数関数について考えていくことにします。

$y=a^x$ ($a>0$、$a\neq 1$)・・・ ③ ($a\neq 1$ とする訳は、$a=1$ だと、$y=1$ となり指数関数でなくなるから)

において、微分法を用いて $x=0$ における接線の傾き(微分係数)を求めるには、

『$(a^{0+h}-a^0)/h$ において、$h\to 0$ とする』

を計算すればよいです。(首をかしげるようであれば、§24 を再読してください)

$a^{0+h}=a^0\times a^h$ ですが、$a^0=1$ なので(§23)、上の『 』は

『$(a^h-1)/h$ において、$h\to 0$ とする』

を計算することになります。

したがって、$x=0$ における接線の傾きがちょうど 1 になるということは、

『$h\to 0$ のとき、$(a^h-1)/h\to 1$ 』

であるような a を底とする指数関数 $y=a^x$ ということになります。先ほど説明したように、このような a は 2 と 3 の間にありそうですが、実際の値は 2.718・・・ (確かに 2 と 3 の間)というπと同じように無限に続く小数(無理数)です。この値はネイピア数と言って(ネイピアという数学者が見出した)、e で表します。すなわち、

『 $h\to 0$ のとき、$(e^h-1)/h\to 1$ 』・・・ (A) ($e=2.718$・・・)

この e はπと同じように数学において、また物理をはじめとした自然科学において、しばしば登場する非常に重要な意味をもった数です。

ところで、本来この e は次のように定められます。n を自然数として、

『 $n \to \infty$ のとき、$(1+1/n)^n \to e$ 』・・・ (B)

幸い難しい式ではないので、関数電卓が使えれば、n に大きな数を入れることである程度計算できそうです。例によって PC の関数電卓で確かめてみましょう。

$n=2$ のとき　$(1+0.5)^2=2.25$

$n=10$ のとき　$(1+0.1)^{10}=2.593$・・・

$n=100$ のとき　$(1+0.01)^{100}=2.704$・・・

$n=1000$ のとき　$(1+0.001)^{1000}=2.716$・・・

というように、n を大きくしていくと、$(1+1/n)^n$ はわずかながら上昇しつつ、2.718・・・という値に近づいていきます。n の増加に伴って式の値が増加することは高校で習う数学で証明できます。

注）今の $(1+1/n)^n$ のように、n の増加に伴って式の値がわずかながらでも常に増加する状態にあるとき、「単調増加」という言い方をする。また、単調増加する式の値が全ての n に対してある値より大きくはならないとき、その式はある値に収束する。上の $(1+1/n)^n$ は単調化増加で、全ての n に対して 3 より小であることが示せる。

少々ハイレベルな話になりますが、(B)によって定められる e の値に対して(A)が成り立つことを確かめてみましょう。（時には少し困難なことに挑戦するのもよいでしょう・・・）

まず(B)において、$1/n=t$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $t\to 0$。従って(B)は

『 $t\to 0$ のとき、$(1+t)^{1/t}\to e$ 』── (B')

と書き換えることができます。次に、(A)において、$e^h-1=s$ とおきます。

$e^h=1+s$　($h\to 0 \Leftrightarrow s\to 0$ であることを確認してください。$e^0=1$ であることから分かるでしょう)

対数で書き換えると、

$h=\log_e(1+s)$

これから、

$h/(e^h-1)=\log_e(1+s)/s$　　注）本当は $(e^h-1)/h$ なのだが書きやすさから逆数で

$=1/s(\log_e(1+s)$

$=\log_e(1+s)^{1/s}$　（公式 $p\log_e x=\log_e x^p$ を用いる）

(B')で、$t\to 0$ のとき、$(1+t)^{1/t}\to e$ だから、$s\to 0$ のとき、$(1+s)^{1/s}\to e$。

従って、$t\to 0\,(h\to 0)$ のとき、

$(e^h-1)/h=1/\log_e(1+s)^{1/s}\to 1/\log_e e=1/1=1$

よって、(A) の

『 $h\to 0$ のとき、$(e^h-1)/h\to 1$ 』

が、成り立ちます。

何が分かったかと言うと、本来(B)で定義される e に対して、e を底とする指数関数 $y=e^x$ のグラフは、$x=0$ における接線の傾きが 1 である、ということです。さらに、$y=e^x$ において、任意の x での微分を考えると、

$((e^{x+h})-e^x)/h=e^x(e^h-1)/h$

従って、$h\to 0$ にすると、$(e^h-1)/h$ の部分が 1 に近づくので、上の式は e^x 即ち元の式になりま

す。つまり、$y=e^x$ は微分しても元の関数のままという大きな特徴があります。ということは、$y=e^x$ は、積分しても基本的には元の関数のままということになります（厳密には定数の差が生じるが）。

さらに、この e を底とする対数関数 $y=\log_e x$（このように e を底とする対数のことを自然対数という）の微分を考えてみましょう。似た話をすでにやっているので、とっつきやすいと思います。§25 の導関数の求め方に従って計算してみます。

$f(x)=\log_e x$　において、

$f'(x)=\lim_{(h\to 0)}$

$=\lim_{(h\to 0)}\{\log_e(x+h)-\log_e x\}/h$

$=\lim_{(h\to 0)}(1/h)\{\log_e(x+h)/x$

$=\lim_{(h\to 0)}(1/h)\{\log_e(1+h/x)$

$=\lim_{(h\to 0)}(1/x)(x/h)\{\log_e(1+h/x)$

$=\lim_{(h\to 0)}(1/x)\{\log_e(1+h/x)^{x/h}\}$

ここで、h/x を t とおけば、$h\to 0$ のとき、$h/x\to 0$ であり、従って $t\to 0$ なので、

(B')より、$(1+h/x)^{x/h}=(1+t)^{1/t}\to e$。よって、

$f'(x)=(1/x)\log_e e$

$=1/x$

となります。つまり、底を e とする対数関数 $y=\log_e x$ の微分は $y=1/x$ という非常に簡単な式になるという大きな特徴があります。逆に、$y=1/x$ を積分すると、$y=\log_e x$ （＋定数）になるという訳です。このようなことからも、ネイピア数 e という数が非常に特徴的で重要な（本当の意味はいろいろこの先経験しなければ分かりませんが）数であろうことが想像できるでしょう。

先ほども言ったように、ネイピア数 e は数学の分野、自然科学等の分野で円周率 π と同じように大活躍します。

§19 に登場する虚数単位の i と、今のネイピア数の e と、円周率 π の間に成り立つなんとも簡明で美しく数学の分野でもっとも有名な公式（オイラーの公式という）を紹介します。

$e^{i\pi}=-1$

それぞれ全く関係のない、しかも数学における最も重要な三つの数が、こんな単純な美しい形で結びつくというのは本当に神秘的としか言いようがありません。初めてこの公式にたどり着いた人は誰もが感動するものです。

できたら、この『オイラーの公式』は頭の片隅にでもとどめておくとよいでしょう。本屋へ行けばこの表題の本は何冊も見つけられるでしょうし、運がよければ大学の教養課程あたりの数学で登場するかもしれません。