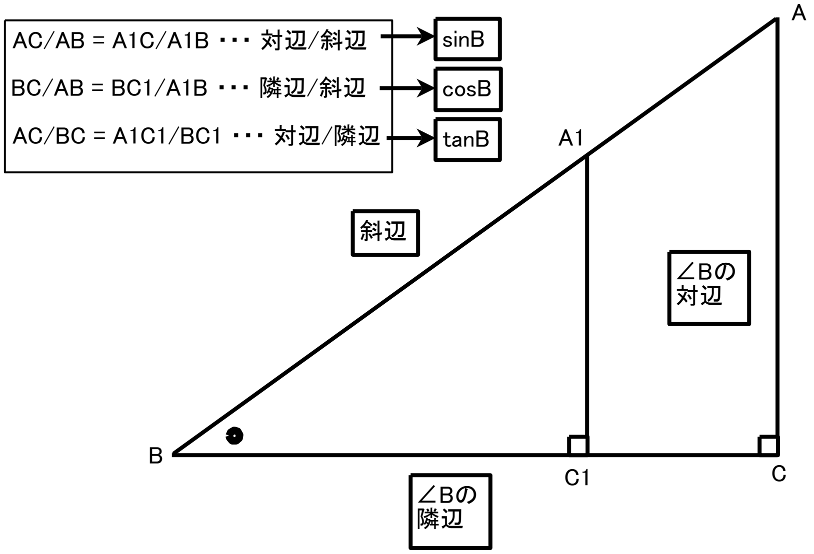
§25. 三角形に始まり三角形にはとどまらず（sin、cos、tan）

△ABC は∠C＝90°の直角三角形とします。辺 AB が斜辺です。辺 AB 上の点 A_1から辺 BC に垂線を下ろしその足を C_1 とします。$△A_1BC_1$ は$∠C_1$＝90°の直角三角形で$△ABC∽△A_1BC_1$ になります。したがって、二つの三角形の辺の間に次のような比の等式が成り立ちます。



$AC/AB＝AC_1/AB_1$　　（∠B に対する対辺）と（斜辺）の比

$BC/AB＝BC_1/AB_1$　　（∠B に対する隣辺）と（斜辺）の比

$AC/BC＝A_1C_1/BC_1$　　（∠B に対する対辺）と（∠B に対する隣辺の比）

注目すべきことは、△ABC において、また新たにできる$△A_1BC_1$ に対しても、上に掲げた辺の比の値が変わらない、という点です。つまりこれらの比の値は∠B 固有の値と考えられるわけです。そこで、∠C=90°の直角三角形 ABC において、∠B の三角比と称する値を次のように定義します。ただし、ここでは 0°＜B＜90°とします。

sinB＝AC/AB　（サイン B　∠B の対辺/斜辺 ）＜シャジョウノタイサ＞

cosB＝BC/AB　（コサイン B　∠B の隣辺/斜辺 ）＜シャジョウノリンコ＞

tanB＝AC/BC　（タンジェント B　∠B の対辺/∠B の隣辺 ）＜傾き＞

三つの辺において二つの辺の比は全部で六通り考えられますが、残る三つはこれらの逆数なので、とりあえずこの三つを定義します。

ところで、今は∠B に注目しましたが、もう一つの鋭角∠A に注目すると次のようになります。斜辺は AB のままで、対辺が BC、隣辺が AC ですから、

sinA＝BC/AB

cosA＝AC/AB

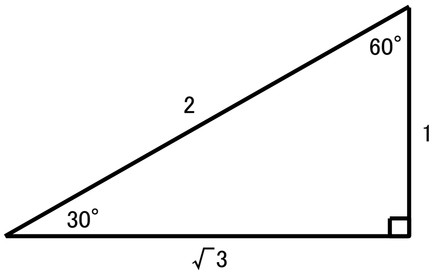
tanA＝BC/AC

余角の関係にある（足して 90°）∠B と∠A の三角比の間には次の関係が成り立ちま

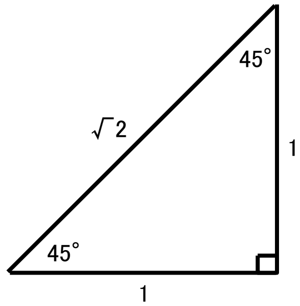
す。

$\sin A = \cos B$、
$\cos A = \sin B$、
$\tan A = 1/\tan B$

直角三角形で角度と辺の比が簡単に表せるのは三角定規としても使われる(図の)二つですが、上で定義した三角比を実際に求めてみます。辺の長さはできるだけ簡単な数の比にしています。



$\sin 30° = 1/2$　$\sin 60° = \sqrt{3}/2$
$\cos 30° = \sqrt{3}/2$　$\cos 60° = 1/2$
$\tan 30° = \sqrt{3}/3$　$\tan 60° = \sqrt{3}$



$\sin 45° = \sqrt{2}/2$
$\cos 45° = \sqrt{2}/2$
$\tan 45° = 1$

$\sin 30° = 1/2$　　$\cos 30° = \sqrt{3}/2$　　$\tan 30° = \sqrt{3}/3$
$\sin 45° = \sqrt{2}/2$　　$\cos 45° = \sqrt{2}/2$　　$\tan 45° = 1$
$\sin 60° = \sqrt{3}/2$　　$\cos 60° = 1/2$　　$\tan 60° = \sqrt{3}$

注)丸暗記する必要はありません。定義さえ頭にあればいつでも言えます。

ピタゴラスの定理で、$AC^2 + BC^2 = AB^2$ ですが、両辺を AB^2 で割って、
$(AC/AB)^2 + (BC/AB)^2 = 1$ より、(また B を一般的によく用いる θ(シータ)にして)、
$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ･･･ ①　(**$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$** のようにも書く)
が成り立ちます。また、$AC = AB\sin B$、$BC = AB\cos B$ より、(やはり θ を用いて)、
$\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$ ･･･ ②
が成り立ちます。

これが直角三角形における三角比です。直角三角形において、直角以外の一つの角度が分かれば残る角度は分かりますし、どれか一つの辺が分かれば残る辺は三角比を用いて計算できます。あるいは、二つの辺が分かれば残る一辺は分かりますし(ピタゴラスの定理)、三角比を計算することで角度を求められます。その際使われるのが三角比表と言って $0° < \theta < 90°$ の三角比の値をまとめて表にしたものです。なお、関数電卓(Windows PC の場合アクセサリにあり)を使えばこの三角比を簡単に求められます。

念のために例を示します。

例1] 木の根元から 10m はなれた地点から木の先端を見上げる角度を測ったら 27°であった。この木の高さは何 m か。目の高さは 0m とする。

解]

木の高さを h(m)とすると、$h/10 = \tan 27°$。三角比表(関数電卓)より、$\tan 27° \fallingdotseq 0.51$。よって、$h = 10 \times 0.51 = 5.1$(m)。

例2] $\angle C = 90°$の直角三角形 ABC で、$AB = 5$、$AC = 3$ のとき、B は何度か。

解]

sinB＝3/5＝0.6 三角比表の sin において、0.6 に最も近い角度は 37°。よって B＝37°。

次に、角度 θ を一般化します。マイナスも含めて任意の大きさにします。こうなるともう直角三角形で考えるわけにはいきません。xy 座標平面で単位円（原点中心、半径 1 の円）を用います（長さの比なので、半径 r の円で考えても同じ）。円周上の点を P として OP（これを動く径という意味から『動径』と言う）と x 軸の正方向となす角を θ で表すことにします。θ は左回り（時計の針とは逆の回転）をプラス、右回りをマイナスとします。今後は動径 OP の角という場合はこのような角を意味することとします。θ が 360°（－360°）で点 P は元の x 軸上に戻り、その後はくるくる回転して同じことを繰り返します（逆回転も同様）。また、たとえば θ＝270°と θ＝－90°では点 P は同じ位置になります。このような θ（一般角という）に対して、sin、cos、tan が次のように定義されます。

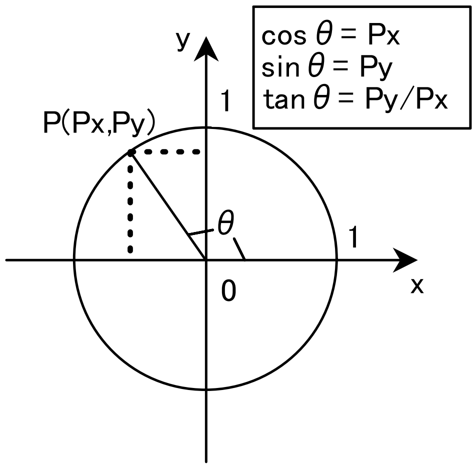
点 P の座標を（Px、Py）、動径 OP の角度を θ とするとき、

cosθ＝Px

sinθ＝Py

tanθ＝Py/Px （ただし、θ≠360°×n±90°(n は整数）、つまり Px＝0 となる角を除いた）

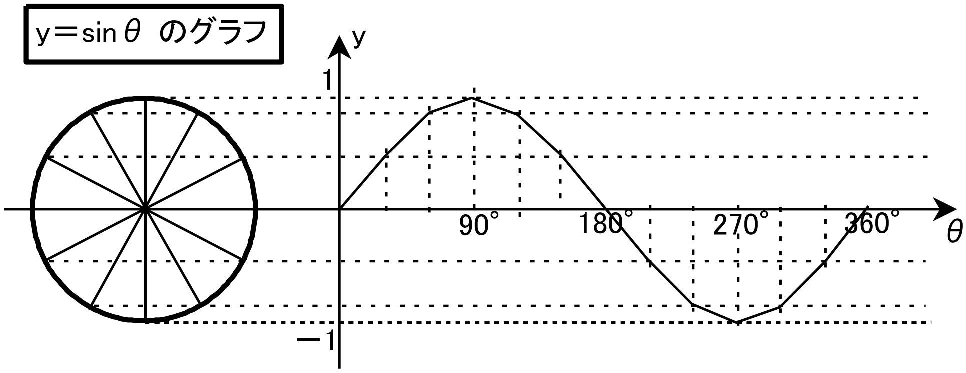
（注：OP=1 としたが、OP＝r の場合には、cosθ＝Px/r、sinθ＝Py/r である。また 0°＜θ＜90°の場合は上の三角比の定義と同じになる）



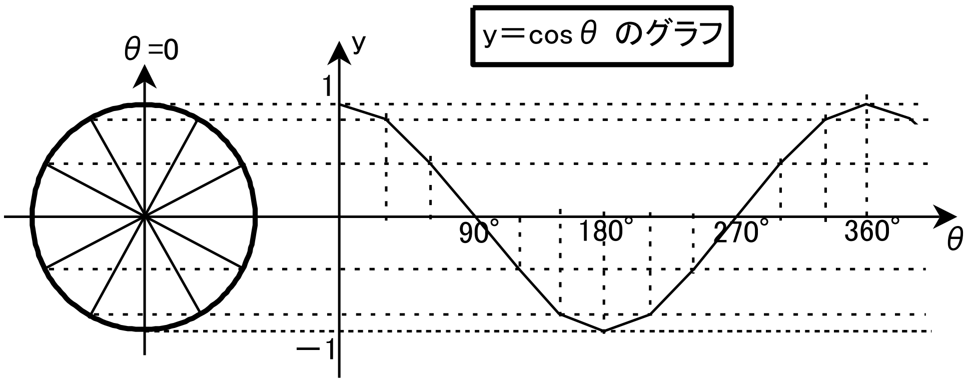
y＝cosθ、y＝sinθ、y＝tanθ として、横軸が θ、縦軸が y の座標平面で考えると、それぞれ任意の実数 θ（ここでは角度）に対して y の値が対応する関数と考えられます。そのようなわけで、これら三つの関数を三角関数という言い方をします。

まず、これらの三角関数のグラフがどのようになるか、直感的に考えてみましょう。単位円周上を点 P が回転するとき、その x 座標（cosθ）、y 座標（sinθ）、y/x（tanθ）がどのように変化するかを考えます。θ＝0°のとき点 P は点（1、0）にあります。このとき cosθ＝Px＝1、sinθ＝Py＝0、（tanθ は別途後ほど）です。そして θ が増加するにつれて Px（cos θ）は徐々に減少し、Py（sinθ）は増加します。θ が 90°になると、cosθ は 0、sinθ は 1 です。θ が 90°を超えてさらに増加すると、cosθ はマイナスの値になってさらに減少し、sinθ は 1 から減少します。そして θ＝180°で、cosθ＝－1、sinθ＝0 になります。180°から 360°までもこのように追いかければ大体どのように変化するかつかめるでしょう。θ＜0°に関しても同様です。

三角関数のグラフは y＝tanθ も含めて、次のように工夫すると、ある程度正確にとらえることができます。（注：グラフは折れ線状になっているが、動径の角を細分化すれば曲線に近づく）



y＝sinθのグラフはで、単位円上の動径のｙ座標がsinθの値であることを利用しています。



y＝cosθのグラフでは、同じく動径のx座標を利用するために、単位円を90°回転させています。

y＝tanθのグラフ（次ページ）では、tanθの値が動径の延長線とθ＝0°に垂直に立てた軸（数直線）との交点の座標に等しくなることを利用しています。45°、135°、・・・、の値が±1 になる角度も活用しています。動径が縦軸に近づくと＋∞、－∞になることがよく分かると思います。

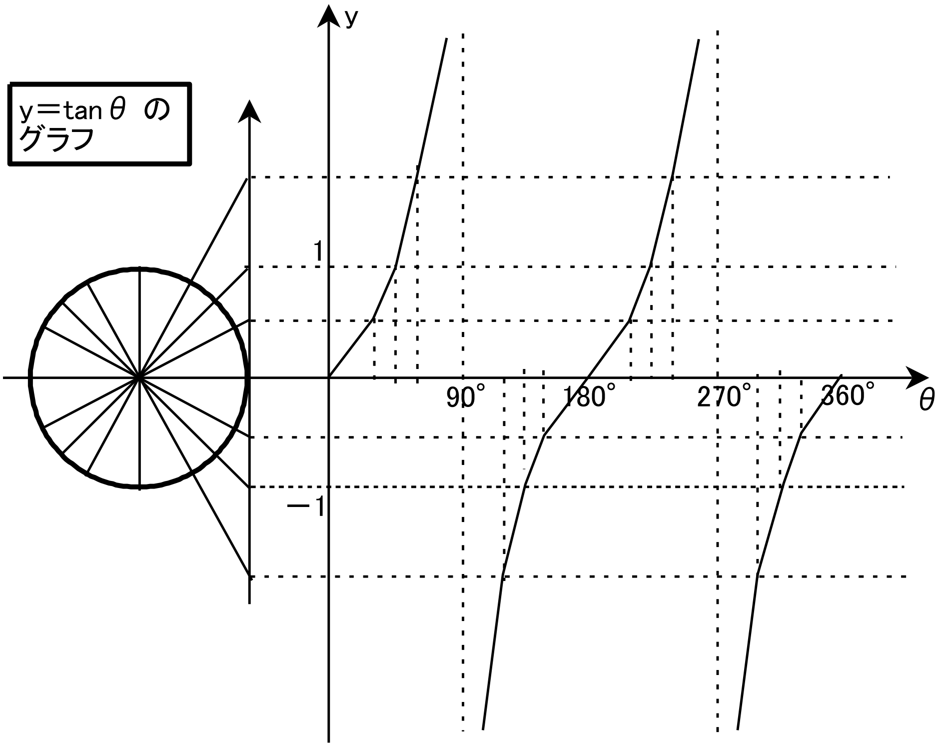
y＝sinθ、y＝cosθ のグラフはその定義からも分かるように同じ曲線で、どちらかを 90°平行移動させれば重なります。y＝ tanθ は Py/Px ですから、Px の値が 0 になる角度、θ＝90°＋360×n、270°＋360×n（n は整数）では定義されません。

三つのグラフはいずれも同じ曲線の繰り返しになりますが、このような関数を周期関数と言います。繰り返しの最小の幅を周期と言いますが、y＝sinθ、y＝cosθの周期は 360°、y＝tanθの周期は 180°です。

せっかく一般角の三角関数を定義したのですから、少し意味のあることに取り組みましょう。まず一般の三角形（したがって鈍角三角形も含む）の辺と角の関係を考えます。鈍角も考慮する関係で、しばらくは 0°≦θ≦180°とします。

注）三角形では今の不等式で＝はありえませんが、三角関数では上のグラフで

もそうだったようにいずれ θ はマイナスも含めて任意の値で考えるようになります。



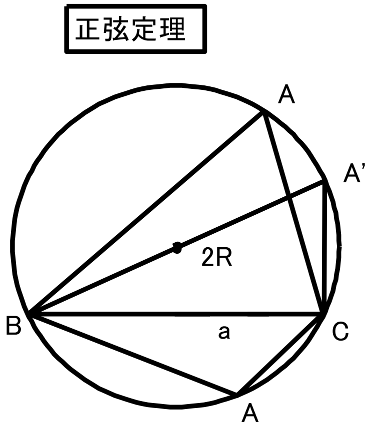
角が θ、180°－θ であるような二つの動径 OP、OP'は y 軸に関して対称になります。と言うことは点 P および点 P'の y 座標が等しいので、sin の値は一致します。x 座標(cos の値)は異符号になります。したがって、

0°≦θ≦180 において、

sin(180°－θ)＝sinθ ・・・ ③

cos(180°－θ)＝－cosθ ・・・ ④

三角形の合同条件は、「ｉ) 二辺とそのはさむ角、ii) 二角とそのはさむ辺、iii) 三辺 」のいずれかが一致することですが、これらは三角形が一つに確定することを意味しています。と言うことは残りの要素(辺や角)やさらには面積も計算で求められるはずです。以下そのことを確かめるための話です。



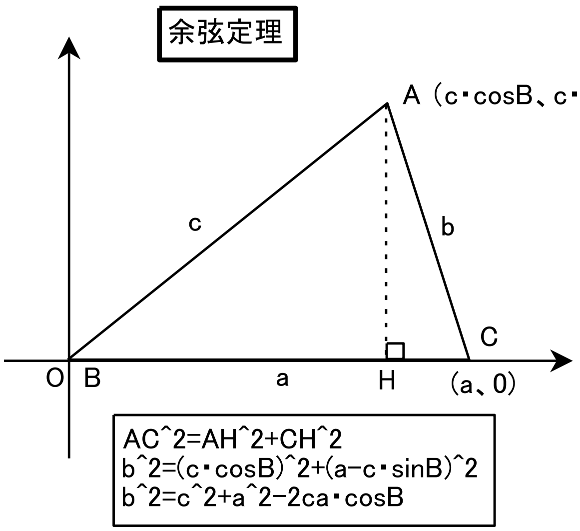
△A' BCにおいて、
sinA' =BC/A' B=BC/2R
A'=AあるいはA'=180−Aより
sinA=sinA'
∴sinA=BC/2R

＜正弦(sin)定理＞

任意の△ABC において、その外接円 O を描

き、その半径が R だったとします。B を通る直径を BA'とすると、A'=A(A が鈍角の場合は A'＝180°－A)であり、∠BCA'＝90°です。直角三角形 A'BC において、
sinA'＝sinA＝BC/2R　(③より、A' が鈍角の場合も同様)
∴ 2R＝BC/sinA
　B、C に対しても同様に言えるから、
　BC/sinA＝CA/sinB＝AB/sinC(＝2R)
　　　　　　　　　　　・・・ ⑤ ＜正弦定理＞
　　　(注:辺の長さを a、b、c とすれば
　　　　　a/sinA＝b/sinB＝c/sinC)

＜余弦(cos)定理＞



　任意の△ABC において、B を原点、辺 BC を含む直線を x 軸とする座標平面で考えます。点 C の座標は(a、0)、点 A の座標は(c cosB、c sinB)です。CA(＝b)の長さの二乗は、
b^2＝(c cosB－a)^2
　　＋(c sinB－0)^2
　＝c^2{(cosB)^2＋(sinB)^2}
　　－2ca cobB＋a^2
　＝c^2＋a^2－2ca cosB
　　　　　　　　・・・ (＊)
　この式は、B とそれをはさむ二辺 c と a から残りの辺 b が計算できることを意味しています。また、次のように書き換えると、
　cosB=(c^2＋a^2－b^2)/2ca
　三辺から B を計算できることがわかります。B＝90°のとき、cosB＝0 なので、上の(＊)は、b^2＝c^2＋a^2 というピタゴラスの定理になります。
　余弦定理をまとめると次のようになります。
　a^2＝b^2＋c^2－2bc cosA　(cosA＝(b^2＋c^2－a^2)/2bc)
　b^2＝c^2＋a^2－2ca cosB　(cosB＝(c^2＋a^2－b^2)/2ca)
　c^2＝a^2＋b^2－2ab cosC　(cosC＝(a^2＋b^2－c^2)/2ab)

＜三角形の面積＞

任意の△ABC において、A から辺 BC（C＞90°の場合は BC の延長線、B＞90°の場合は CB の延長線）に垂線を下ろし足を H とします。

AH＝AB sinB、あるいは、AH＝AB sin（180°－B）＝AB sinB

したがって、△ABC の面積は

＝（BC・AB sinB）/2

まとめると、次のようになります。

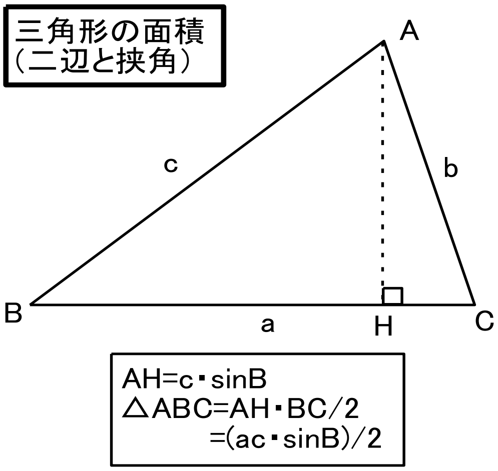
△ABC（面積）

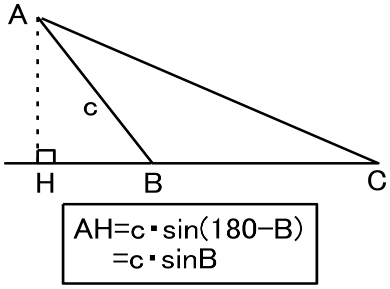
＝（AB・BC sinB）/2＝（ca sinB）/2

＝（BC・CA sinC）/2＝（ab sinC）/2

＝（CA・AB sinA）/2＝（bc sinA）/2

これらは二辺とそのはさむ角から面積を求める式になっていますが、二角とそのはさむ辺や、三辺が与えられ場合でも、正弦定理や余弦定理を用いれば、この式から面積を求めることができます。





三角関数は数学以外でも自然科学の分野などで非常に活躍します。また身近なところにも存在します。目で見ることはできませんが、家庭に供給されている電気は一秒間に 50 回ないし 60 回流れる方向が入れ替わる交流で、その状態をグラフで表すとサインカーブです。つまり火力や水力でタービンを回すことによって得られる電気が（今はあまり見かけなくなりましたが、自転車の自家発電の電気も）サインカーブを描くのです。音波やアナログの電気信号も、複雑な三角関数で表わされます。

最後にもう一つ、角の大きさを表す単位の話です。小中学生までは角の大きさを表すのに度数法を用いてきました。即ち一回転の角の大きさの 360 分の 1 を 1°としたのです。ところが数学や自然科学では、別の仕方で角の大きさを定めます。

半径 r の円において、**弧の長さが r に等しい中心角の大きさを 1** と定めるのです。これを弧度法といいます。単位は弧度あるいはラジアンですが、何もつけずに数値だけで表すのが普通です。360°に相当する一周分は弧の長さが 2πr なので、2π（ラジアン）です。同様に 180°はπ、90°はπ/2 です。何故このような角を用いるかというと、微分や積分で必要になるからです。と言うことは自然科学の分野ではこの弧度法が当たり前に使われます。

注）180°がπラジアンなので、1 ラジアンは

180°/3.14≒57.3°

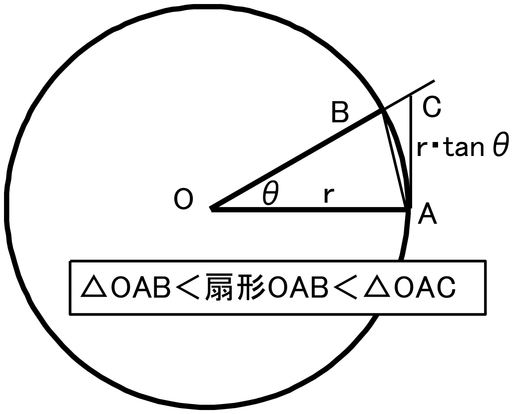
およそ、57.3°。弧の長さが半径に等しい扇系の中心角の大きさです。

弧度法を用いると、半径 r の円において、中心角が θ である弧の長さは rθ に、扇形の面積は $r^2θ/2$ になります。

注）中心角が 2π の円の面積 $πr^2$。従って中心角 θ の扇形の面積 S とすると、

$2π/θ=πr^2/S$ よって、$S=r^2θ/2$

図をご覧ください。半径 r の円において、中心角θの扇形です。図のように二つの三角形を作図すると、三つの図形の面積の間に次の関係が成り立ちます。



△OAB＜扇形 OAB＜△OAC

$r^2 \sinθ/2 < r^2θ/2 < r^2 \tanθ/2$

$\sinθ < θ < \sinθ/\cosθ$

各辺を sinθ（＞0）で割ります。

$1 < θ/\sinθ < 1/\cosθ$

後々のために（結果として sinθ/θ の形の式が欲しい）、ここで各辺の逆数に変えます。（どの辺も正なので、逆数にすると大小がひっくり返る）

$1 > \sinθ/θ > \cosθ$

これで、θ→ 0 とします。真中の sinθ/θ は分母も分子も → 0 なので、0/0 というわけのわからないことになります。ところが、θ→ 0 のとき、cosθ→1 なので、sinθ/θ → 1 となります。このような極限の値の求め方をする考え方を、『挟み打ちの原理』と言います。

θ→ 0 のとき、sinθ/θ → 1

なぜこのような話をしたかというと、これを使えば、三角関数 y＝sinx の微分が求められるからです。

注）このあと三角関数における公式をいくつか用いることによって（ここでは省略するが）、

(sinx)'＝cosx

(cosx)'＝－sinx

を求めることができる。なお、このことは、y＝sinx、y＝cosx のグラフのそれぞれの曲線上の点における接線の傾きからおおむね想像できる。

またこれから、

$\int \boldsymbol{sinxdx} = -\mathbf{cosx} + \mathbf{C}$

$\int \boldsymbol{cosxdx} = \mathbf{sinx} + \mathbf{C}$

さらに、$\int_0^{\pi} sinxdx = [-\cos x]^{\pi}{}_0 = -(\cos\pi - \cos 0) = 1$

すなわち、y＝sinx のグラフの一山分の面積が 1 であることが分かる。