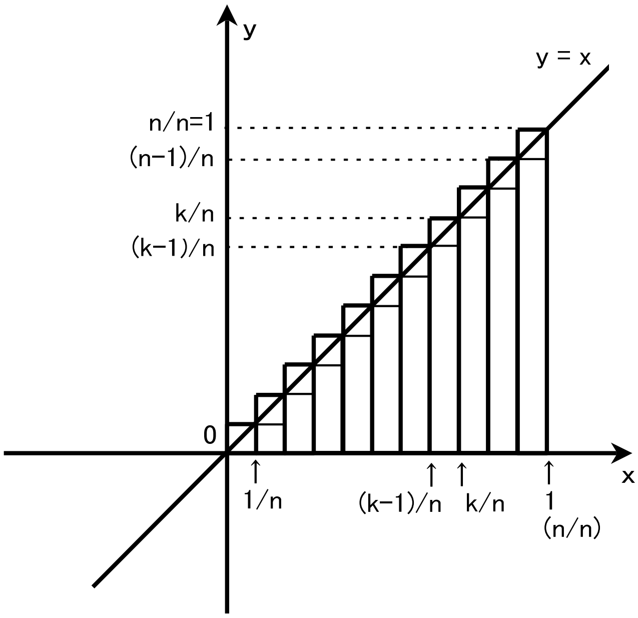
§24. グラフの足跡から面積を求める（積分法）

この章では、グラフで囲まれた部分の面積やある立体の体積を区分求積法という考え方で求める方法について説明します。そのことが積分（法）につながるのですが、あまり深入りはせず、ここでは積分法が微分法の逆の計算法である（つまり、関数 f(x)を積分して微分すると元に戻る）ことを知るのを目指そうと思います。実際のところ、微分法が機械的な計算で求められるのに対して、積分法の計算は簡単ではありません。



微分ではグラフ上の点の接線の傾きが求められましたが、積分では曲線で囲まれた図形の面積を求めたり、単純でない立体の体積を求めたりすることができます。まずはあまり意味のないことをやりますが（三角形の面積を求める）、次にやる少し本格的なことを理解するための準備、練習です。

座標平面上で、直線 $y=x$ と x 軸および直線 $x=1$（x 軸の $x=1$ の点を通り x 軸に垂直な直線）とで囲まれる図形（なんてことはない、直角を挟む二辺がともに 1 の直角三角形）の面積を、「区分求積法」と呼ばれる方法で求めます。

x 軸上で、0 と 1 の間を n 等分して n 個の区間を作ります。各区間の幅は 1/n で、一番目は 0 から 1/n、二番目は 1/n から 2/n、・・・、k 番目は (k－1)/n から k/n、・・・、最後は (n－1)/n から n/n（＝1）です。図のように各区間において、直線の左端を高さとする長方形と右端を高さとする長方形を描きます。実際の三角形の面積は直線の下方にできた長方形の面積の総和より大きく、上方にできた長方形の面積の総和より小さいです。上方の長方形の高さは各区間の右端の x の値に対する y の値ですから、例えば、4/n と 5/n の間の区間では、$x=5/n$ における y の値 5/n が高さになります。よって、上方にできる n 個の長方形の面積の総和（S_2 とする）は、

$S_2=1/n\cdot1/n+2/n\cdot1/n+3/n\cdot1/n+\cdots+k/n\cdot1/n+\cdots+n/n\cdot1/n$

$\quad=(1+2+3+\cdots+k+\cdots+n)\cdot1/n^2$

$\quad=n(n+1)/2n^2$ 　（ $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$ ・・・ ① これについては後ほど）

$\quad=(1+1/n)/2$ 　（分母、分子を n^2 で割った）

n 等分の n を限りなく大きくしていくと、1/n は限りなく 0 に近づくので、S2 の値は 1/2 に近づきます。同様に下方にできる長方形の面積の総和（S1 とする）は、

$S_1=(0/n+1/n+2/n+\cdots(k\text{-}1)/n+\cdots+(n-1)/n)\cdot1/n$

$=(0+1+2+\cdots+(k-1)+\cdots+(n-1))\cdot 1/n^2$

$=(n-1)n/2n^2$　（①の n を $(n-1)$ とした）

$=(1-1/n)/2$

n を限りなく大きくしていくと、S_1 は 1/2 に近づきます。実際の面積を S とすると、$S_1<S<S_2$ であり、S_1、S_2 はともに 1/2 に限りなく近づいて行くので、S は 1/2 であると言えます。

このように、実際の面積を計算しやすい長方形の形に分割して計算し、さらにその分割を限りなく細かくしたときの極限の状態における値として求めるというのが区分求積法の考え方です。

今度は、放物線 $y=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を同じやり方で求めます。先程は求める図形に対して面積の大きいほうからと小さいほうからとの挟み打ちで求めましたが、同じような計算の繰り返しになるので、今回は片方からだけにします。厳密さを必要とするならいつでも両方から挟み打つやり方でできるでしょう。

x 軸上の 0 から 1 を n 等分して、各区間の右端の点におけるグラフ上の点を長方形の高さとします。長方形の面積の総和を S_2 とすると、

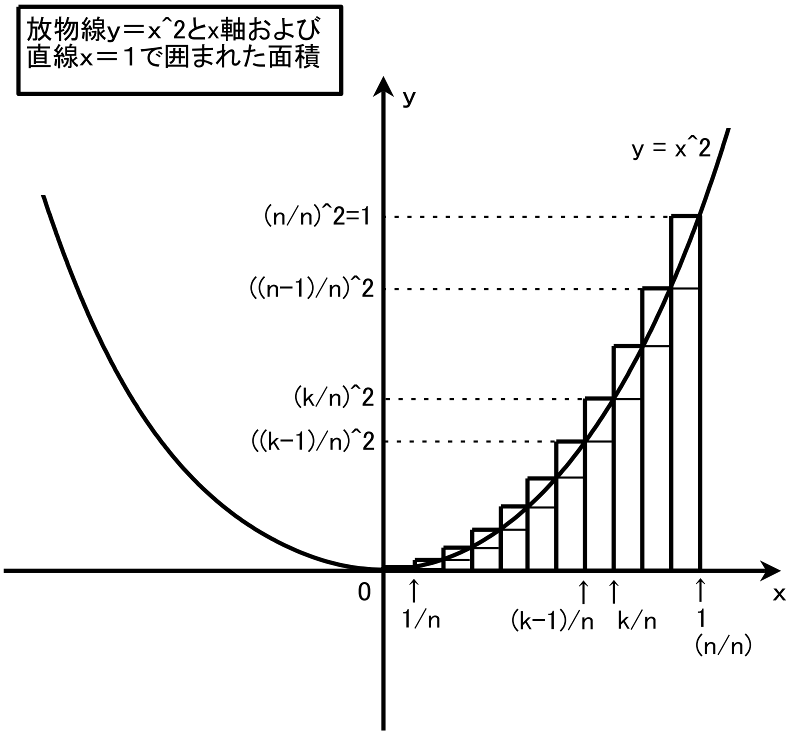
$S_2=\{(1/n)^2+(2/n)^2+(3/n)^2+\cdots+(n/n)^2\}\cdot 1/n$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)/n^3$

$=n(n+1)(2n+1)/6n^3$

（$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$ ・・・②　これについては後ほど）

$=(1+1/n)(2+1/n)/6$



$n\to\infty$ にすると、$S_2\to 1/3$。従って求める面積は 1/3 ということになります。このようにして区分求積法の考え方でグラフの下の部分の面積が求められます。

注）①について、

$(n+1)^2-n^2=2n+1$　（$(n+1)^2=n^2+2n+1$ より、n^2 を左辺へ移行して）

$n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$　（上の式の n に $n-1$ を入れて、以下同様）

$\cdots$

$3^2-2^2=2\cdot 2+1$

$2^2 - 1^2 = 2\cdot1+1$

辺々を全て加えると、$(n+1)^2-1^2=2(n+(n-1)+\cdots+3+2+1)+n$

よって、$2(1+2+3+\cdots+n)=n^2+2n+1-1-n$

$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$

この和に関しては、別の考え方もあります。$S=1+2+3+\cdots+n$ として、

$S=1+\ 2\ +\ 3\ +\cdots+(n-1)+n$

$S=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+\ 2\ +1$

辺々足し算して、$2S=(n+1)n$ （$n+1$ が n 個ある） これから、$S=n(n+1)/2$

②について（少し計算が大変です）、

$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ （ $(n+1)^3=(n+1)^2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1$ より ）

$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$

$\cdots$

$3^3 - 2^3 = 3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$2^3 - 1^3 = 3\cdot1^2+3\cdot1+1$

辺々足し算して、$(n+1)^3-1^3=3(n^2+\cdots+3^2+2^2+1^2)+3(n+\cdots+2+1)+n$

$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(n^3+3n^2+3n+1)-1-3n(n+1)/2-n$

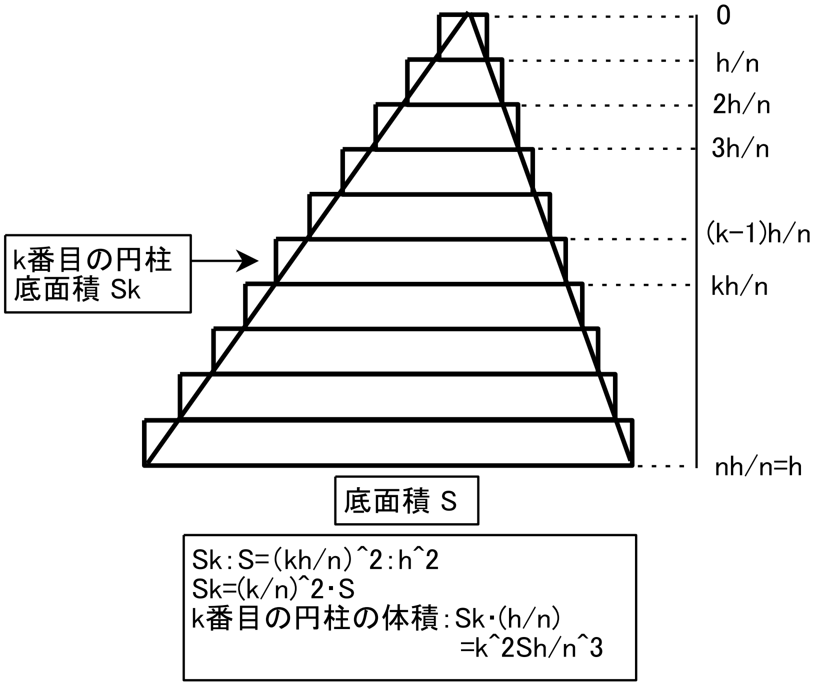
$=(2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n)/2$

$=n(2n^2+3n+n)/2$

$=n(n+1)(2n+1)/2$

よって、$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

今度は円すい、角すいの体積がそれぞれ円柱、角柱の体積の 1/3 になることを確かめます。底面積と高さだけが関わるので、円すいでも角すいでもどちらでも構いません。底面積をS、高さをhの円すいとします。高さhを n 等分して、底面に平行な平面で n 個の円盤状に輪切りにします（真横から見ると n 個の台形に見える）。頂点から数



えて順番に1個目、2個目、・・・、k個目、・・・、n個目とします。それぞれの円盤において、底の円を底面とする円柱を作ります。k番目の円柱の底面の面積をS_kとすると、

$S_k : S = (kh/n)^2 : h^2$　（相似な図形において、面積比は対応する辺の二乗の比に等しい）

$\therefore\ S_k = (k/n)^2 S$

従って、k番目の円柱の体積をV_kとすると、

$V_k = (k/n)^2 S \cdot h/n$（円中の高さはh/n）。

これから、n個の円柱の体積の総和をVとすると、

$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k + \cdots + V_n$

$= \{(1/n)^2 + (2/n)^2 + \cdots + (k/n)^2 + \cdots + (n/n)^2\} Sh/n$

$= (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots n^2) Sh/n^3$

$= \{n(n+1)(2n+1)/6\} Sh/n^3$

$= (1 + 1/n)(2 + 1/n) Sh/6$

$n \to \infty$ のとき、$V \to Sh/3$

従って、円すいの体積はSh/3 です。円すいや角すいの体積が円中、角柱の体積の1/3になるわけがこれで分かったことになります。

今まで、面積や体積を求める方法として区分求積法という言い方で説明してきましたが、同じ考え方で、一般に元の関数に対して上のような方法で（面積や体積を計算できる）新たな関数を求める計算（法）のことを積分（法）と言います。

関数f(x)に対して、積分は次のように表します。

$\int f(x)dx$

∫（インテグラルと読む）は総和という意味です。dx は細分された x の幅を意味します。f(x)が長方形の高さ、dx がその幅と考えれば、直感的に長方形の面積を足し合わせたもので、上でもやったように限りなく細分化したものの総和と考えれば、先程の区分求積法にそのまま結びつけられるでしょう。

関数f(x)のどこからどこまでかを問題とする場合は、

$\int_a^b f(x)dx$ ・・・（A）

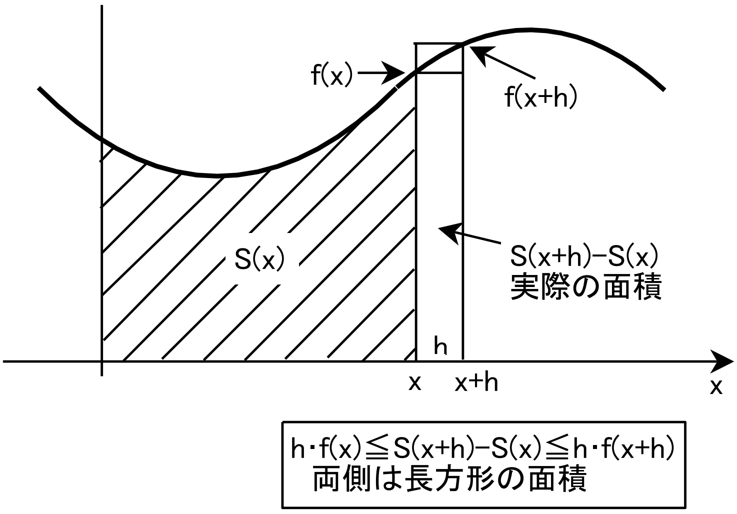
と書きますが、$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ の場合は、まさしく関数 $y=f(x)$ のグラフとx軸との間で $x=a$ と $x=b$ とで挟まれた部分の面積になります。

注）グラフがx軸より下方にある場合には面積がマイナスの値になる。

次に、微分と積分の関係について考えてみます。

図において、関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との間に挟まれた斜線の部分の面積を S(x)とします（面積は右端のxで決まるのでxの関数になる）。また、hを小さな正の値として、右端が x+h のときの面積を S(x+h)とします。xとx+h の間でグラフが単調増加であるとすると、次の不等式が成り立ちます。

$h \cdot f(x) \leqq S(x+h) - S(x) \leqq h \cdot f(x+h)$



注）厳密には x と x＋h の間における f(x)の最小値と最大値で考えるべきだが、以下の話で分かるように、同じように話を進められるので簡略化した。

これから（h で割って）、

$f(x) \leqq \{S(x+h) - S(x)\}/h \leqq f(x+h)$

この不等式の全体で、h→0 にすると、真中の式は S(x)の微分で S'(x)になり、右の式は f(x)になるので、次の関係式が成り立ちます。

$S'(x) = f(x)$

つまり、関数 y＝f(x)において、f(x)を積分した関数（面積）を微分すると元の f(x)になることから、微分法と積分法とは、逆の演算であることが分かります。

さて、せっかくですから、$f(x) = x^2$ を例に、微分計算、積分計算をしてみましょう。

まず、§23 でやったように、

$f'(x) = 2x$

です。つまり、$f(x) = x^2$ の微分は $f'(x) = 2x$ です。ということは、y＝2x を積分したら、x^2 になるはずです。

$\int 2x\, dx = x^2$ （正しくは、$x^2 + C$）

（ ）内の C は定数で、これを積分定数と言います。あまり深入りしないつもりでしたが、この C に関して簡単に触れておきます。一般に関数 y＝f(x)において、y＝f(x)＋C のグラフは y＝f(x)のグラフを y 軸方向に C だけ平行移動したものです。従って両者の同じ x における微分係数（接線の傾き）は変わりません。このことから、微分した結果が 2x になるような元の関数は無数にあるはずで、それを $x^2 + C$ としたのです。容易に分かると思いますが、$x^2 + C$（C：定数）を微分すると 2x です。さらに、

$f(x) = x^3$ の微分は $f'(x) = 3x^2$ です。ということは、

$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$（C：定数）

です。一般に、n を自然数とするとき、

$f(x) = x^n$ の微分は、$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ であり、

$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C$（C：定数）です。

注）付録にある「二項定理」を用いる。

$(x+h)^n = x^n + n \cdot x^{n-1}h + \cdots + h^n$

上のように、積分の計算結果に定数 C が付く計算を不定積分と言います。一般に f(x) の不定積分は F(x) で表します。

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$（C：定数） ⇔ $F'(x) = f(x)$

それに対して、(A) のような場合を定積分と言います。不定積分が求められれば、定積分は次のように計算します。

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{a\to b}$　　注）右下の a→b は普通は] の下に小さく a、上に小さく b と書く

$= F(b) - F(a)$

注）最後の引き算で C は消えるので無視した

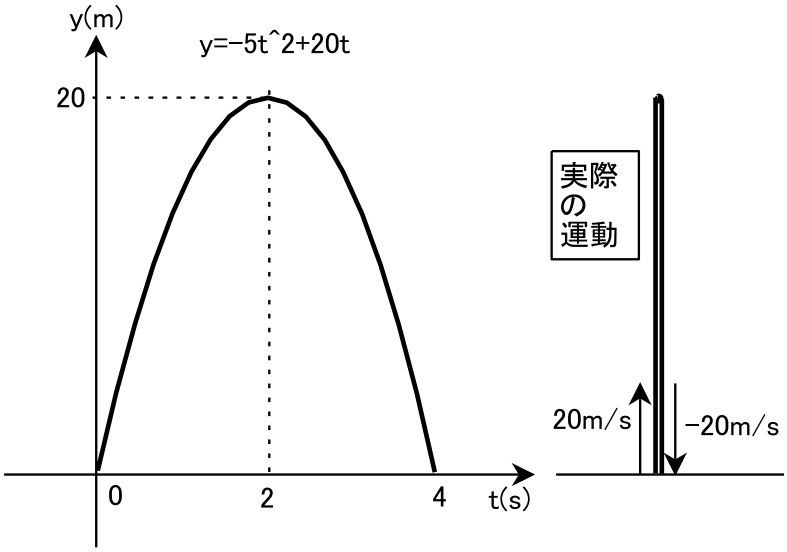
例えば、$f(x) = x^2$ のグラフの x 軸より上の部分で、x＝1 から x＝2 の間の面積は次のように計算します。

$\int_1^2 f(x)dx$

$= [x^3/3]_{(1\to 2)}$

$= (2^3/3 - 1^3/3)$

$= 7/3$



最後に身近なところに関係する微分、積分の話を紹介します。きちんととらえるにはもう少し本格的に勉強しなければなりませんので、ここではごく大雑把な話になります。気楽にお読みください。

空に向かってボールを投げると、ボールは放物線の軌道を描きますが、話を分かり易くするためにここでは真上に投げ上げることにします。投げ上げた瞬間を 0 秒として、t 秒後のボールの高さ y をグラフに表したら図の様であったとします。グラフが放物線なので、いかにもボールの軌道のように思えてしまうかも知れませんが、そうではありません。ボールは真上に上が

って同じ地点に落ちてきます。その様子を時間 t で横に伸ばしたと考えてください。

放物線の式が地上からの高さを y(m)として、 $y = -5t^2 + 20t$ ・・・ ① だったとします。

注)正しくは重力の加速度 g(−9.8m/sec^2)、初速度 v_0(m/sec)とすると、

$y = -gt^2/2 + v_0 t$

y=0 として二次方程式 $-5t^2 + 20t = 0$ を解くと、t(t−4)=より、t=0、4 です。これは t 軸との交点(高さ 0m の地上)ですから、投げ上げた瞬間と落ちてきた瞬間の t が 0 秒と 4 秒であることを意味します。①で、$t = t_1$ における微分を計算すると(v で表すことにします、力試しでやってみてください)、$v = -10t_1 + 20$ ・・・ ② になります。これが①のグラフ上の点 $t = t_1$ における接線の方向(傾き)を表すのでしたが、結論から言うと、運動を表す関数の場合は時間 t による微分が速度を表します。投げ上げた瞬間は $t_1 = 0$(sec)ですから、v=20(m/sec)、つまりボールは秒速 20m/sec で投げ上げられたことになります。$t_1 = 2$(sec)とすると、この点は放物線の頂点ですが、v=0、つまりボールは瞬間的に速度は 0 になります。そして、$t_1 = 4$、つまり地上に落下した瞬間は v=−20(m/sec)になります。初速が 20m/sec で投げ上げられたボールは(重力で引かれるために)次第に速度が落ち、速度が 0 になった瞬間を最高点として、今度はマイナスの速度を増しつつ落下します。

逆に速度の変化を表す関数が与えられると、積分することによって運動を表す関数が求められます。