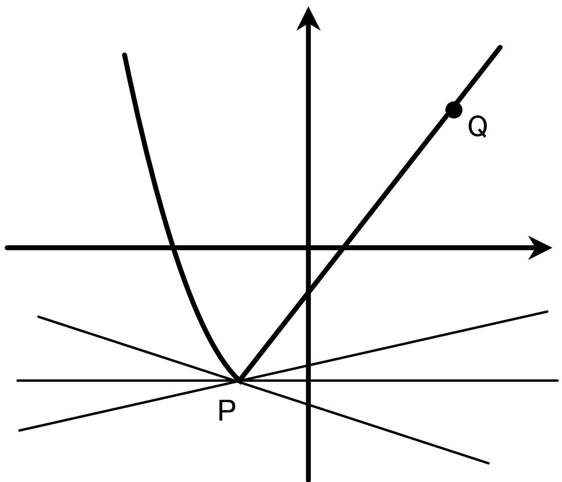
§23. グラフの変化の状態を読む（微分法）

ある曲線のグラフにおいて、そのグラフ上の点Ｐにおける接線というのは、グラフと点Ｐのみを共有する直線のことを言います。中学での円の接線を思い出してください。直感的に分かると思いますが、次のようなグラフ上の点では接線は考えられません。とんがった点や（この場合一点のみを共有する直線は考えられるが一つに定まらない）、直線的な部分（この場合一点のみを共有する直線は考えられない）です。



グラフ上の点Pにおいて、点Pと一点のみを共有する直線は無数に存在する。したがって点Pにおける接線は一つに定まらない（存在しない）。
また点Qはこの点のみを共有する直線は存在しないから、直線上おける接線は存在しない

例として今から放物線 $y=x^2$ において、グラフ上の点 $P(1, 1)$ における接線の方程式を求めます（次ページの図）。そのために接線の傾きから考えます。まず、原点Ｏと点Ｐを通る直線の傾きは $(1-0)/(1-0)=1$ です。同じく点 Ｐ とグラフ上の点 $Q(2, 4)$ を通る直線の傾きは $(4-1)/(2-1)=3$ です。点Ｐにおける接線の傾きはこの間にありそうです。放物線上の点で Ｐよりわずかに左側にある点を $A(a, a^2)$、同じく右側にある点を $B(b, b^2)$ とします（$a<1<b$）。直線 AP の傾き、直線 PB の傾きは

AP の傾き：$(1-a^2)/(1-a)=1+a$ ・・・ ①　　　（注：$(1-a^2)=(1+a)(1-a)$）

PB の傾き：$(b^2-1)/(b-1)=b+1$ ・・・ ②

①において、点Ａを点Ｐに近づけていくとき、a の値は１より小さい側から１に近づいていきます。

②において、点Ｂを点Ｐに近づけていくとき、b の値は１より大きい側から１に近づいていきます。

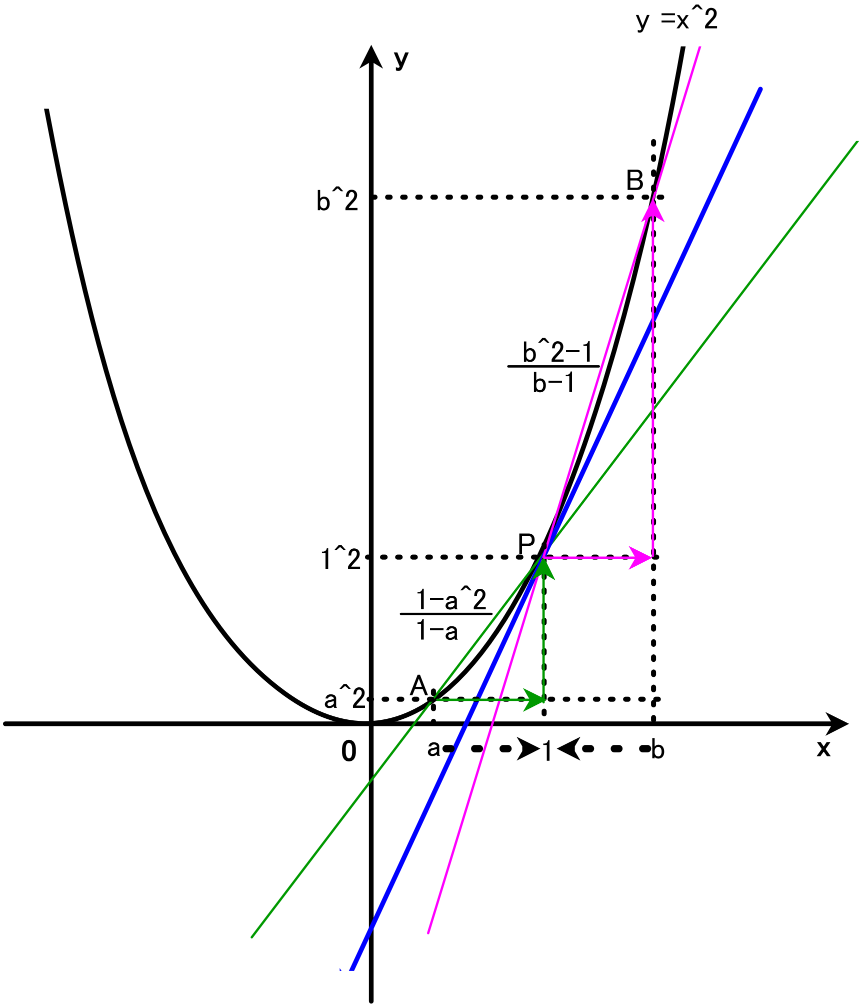
つまり①、②より、点Ｐを通る直線がどちらから近づいても、傾きは２に近づいていきます。このことから、放物線上の点 Ｐ における接線の傾きは ２ であると言えそうです。これがまさしく高校で習う「微分」なのです。今のような計算をすれば（計算ができれば）、曲線上の点における接線の傾きが求められます。今は両側から近づけましたが、普通は片側から近づける計算だけで大丈夫です。

ある曲線上の点において、その点を通る直線の傾きを計算できるということは、その点の接線の方程式を求められるということです。次の注）を確認してください。

注）点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線の方程式は、 $y-y_1=m(x-x_1)$ である。

中学で習ったと思いますが、確認しましょう。理由は簡単に分かります。この式は展開

して整理すると、$y=mx+k$ の形になるので傾きmの直線を表す。$x=x_1$、$y=y_1$ を代入すると、$0=0$ で成り立つので、この直線は点$(x_1、y_1)$を通る。ある点を通って傾き m の直線は一本しかないので、上に書かれたことは確かである。



さて、接線の方程式を求められるようになったので、放物線の重要な性質をつかむためにもう少し話を進めます。

練習に放物線 $y=x^2$ において、点 $P(x_1、x_1^2)$における接線の方程式を求めます。まず傾きは上の①のやり方で、$(x_1^2-a^2)/(x_1-a)=x_1+a$ としてaをx_1に近づけると$2x_1$になるので、傾きは$2x_1$です。

よって、

放物線 $y=x^2$ 上の点$P(x_1、x_1^2)$における接線の方程式は、$y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$ 、すなわち

$y=2x_1x-x_1^2$ ・・・ ③

になります。点Pは放物線上の任意の点ですから、今求めた接線の方程式は任意の点における接線の方程式ということになります。

微分からは少し話がそれますが、せっかく接線の方程式が求められたので、放物線の接線の特徴を一つ確認します。③の式で $x=0$ とすると(y 軸との交点を求めると)、$y=-x_1^2$。よって接線の

y 軸との交点（つまり y 切片）は（0、$-x_1^2$）です。

お気付きでしょうか。今求めた y 軸との交点の y 座標は、点Pの y 座標 x_1^2 と符号が反対です。つまり、「放物線上のある点Pにおける接線の y 軸との交点は、点Pから y 軸へ下ろした垂線の足と原点に関して対称である」と言えます。

§17 の二次曲線・放物線、をご覧ください。放物線において、軸に平行に入った光線は反射すると一つの定点（放物線の焦点）に向かうという性質が登場しますが、このことは今示したことを用いることによって導くことができます。

なお、ここまでは接線の傾きを求めることとして話を進めてきましたが、今のような計算法で求める数値のことを「微分係数」という言い方をするのが一般的です。上の話の中にもあったように、直線上では接線は考えられませんが、微分係数は直線の場合にも計算されます。

さて、せっかく微分の考え方を導入したので、もう少し話を本格化させることにしましょう。以下、関数を $y=f(x)$ で表すことにします。

注）いきなり $f(x)$ などというものが登場しましたが少し説明します。y と x の間に具体的な関係があるときには今までのように、$y=mx+k$ とか $y=ax^2$ のように書けばよいが、右辺の x の式に一般性を持たせたいときに上のように $f(x)$ という表し方をする。f は「式とか関数」という意味の function から。たとえば $x=p$ の時の y 値を $y=f(p)$ で表す。

この表し方を用いると、一般に関数 $y=f(x)$ においてグラフ上の点 $P(a、f(a))$ における微分係数は P の近くの点を $Q(b、f(b))$ として、

「 $\{f(b)-f(a)\}/(b-a)$ において、$b\to a$ としたときの値 」

ということになります。

注）$b\to a$ というのは、b の値を限りなく a に近づけるという意味で結果的には b に a を代入することになるが、いきなり b を a にするわけにはいかない。上の式において直ちに $b=a$ とすると、分母が 0 になる！

このことを、次のような書き方をして、結果の値を $f'(a)$ で表します。

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\{(f(b)-f(a))/(b-a)\} \quad \cdots \text{④}$$

注）lim は limit の略。表示の都合上 $\mathrm{im}_{(h\to 0)}$ のようにも書くことがある。

なお、$b-a=h$ とおいて（このとき、$b=a+h$）、

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\{(f(a+h)-f(a))/h\} \quad \cdots \text{⑤}$$

という表し方もします。

$f'(a)$ は点 $P(a、f(a))$ における微分係数ですが、点 P を特別な点と考えずに、つまり a を一般的な変数と考えて x で表せば、

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\{(f(x+h)-f(x))/h\} \quad \cdots \text{(A)}$$

となり、x の関数になります。この $f'(x)$を $f(x)$の導関数と言います。一般に関数 $f(x)$に対して、導関数 $f'(x)$を求めることを微分するという言い方をします。

たとえば、$f(x)=x^2+3x+1$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{(h\to 0)}\{((x+h)^2+3(x+h)+1)-(x^2+3x+1)\}/h$$
$$=\lim_{(h\to 0)}(2xh+h^2+3h)/h$$
$$=\lim_{(h\to 0)}(2x+h+3)$$
$$=2x+3$$

と計算されます。この導関数において、たとえば $x=0$ とすれば微分係数 $f'(0)=3$ と求められることになります。つまり、グラフ上の点(0、1)における接線の傾きは 3 です。

いかなる関数も、(計算が出来ればの話ですが)(A)によって導関数を求めることが出来ます。これが微分法(単に微分と言うことが多い)です。

それでは、練習で $f(x)=x^3$ の導関数 $f'(x)$を計算してみてください。

注) $(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$ を用いよ。

$f'(x)=3x^2$ になったはずです。

一般に、n を自然数とするとき、$f(x)=x^n$ の導関数は、$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ です。

注)付録にある二項定理をごらんください。

$(x+h)^n=x^n+n\cdot x^{n-1}h+\cdots+h^n$

$f(x+h)-f(x)=n\cdot x^{n-1}h+\cdots+h^n$ で、h で割ると、先頭の $n\cdot x^{n-1}h$ より後の項は全て h が含まれ、$h\to 0$ としたとき消えるため、$n\cdot x^{n-1}$ だけが残る。

最後に、微分法を用いて関数のグラフの状態を調べる方法について考えてみましょう。

例) $f(x)=x^3-3x$

$y=x^3-3x$ のグラフの x 軸との交点は、

$x^3-3x=0$ より、

$x(x^2-3)=0$

$x=0、\pm\sqrt{3}$

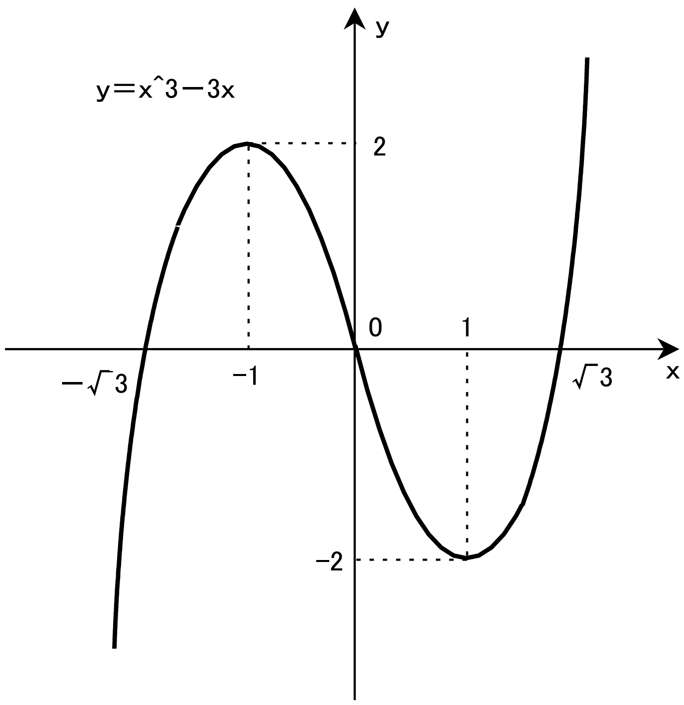
$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x+1)(x-1)$

$1<x$ のとき、$f'(x)>0$ なので接線の傾きは正、従ってグラフは右上がり。

$-1<x<1$ のとき、$f'(x)<0$ なので、グラフは右下がり。

$X<-1$ のとき、$f(x)>0$ なので、グラフは右上がり。



また、$x=\pm1$ のとき、$f'(x)=0$ なので、接線の傾きは0。以上のことを考慮すると、グラフは図のような状態であろうと考えられます。点 P(－1、2)はそれより左側でグラフが右上がりであり、右側で右下がりとなる境目の点と考えられます。山のてっぺんで瞬間的に接線が水平(傾き 0)になります。グラフのこのような点のことを極大(点)と言います。その時の極大値は 2 です。同様に点 Q は極小(点)であり、極小値は－2 です。またグラフは $x\to\infty$ のとき y の値は限りなく大きくなり、$x\to-\infty$ のとき限りなく小さくなります。

注)x^3-3x において、$x\to\infty$ とすると、$x^3\to+\infty$ であり、$-3x\to-\infty$ だが、
$x^3-3x=x^3(1-3/x^2)$ と考えると、$x\to\infty$ のとき( )→1 であるから、式全体は
$\to+\infty$ である。

この例のように、微分法は関数のグラフの概形をつかむのに非常に有効な手段となります。