§22. 必要から生まれた新たな数（指数から対数へ）

（1）指数の拡張

$2^{\square}$ のように、数の右上に小さく書く数を指数と言います。意味は中学で習ったと思いますが、たとえば、2^3なら、2 を三回掛ける意味で、$2^3=2\times2\times2=8$ です。すぐに分かることですが（習ったことがなかったとしてもあるいは忘れたとしても）、次の①、②、③が成り立ちます。ただし、m、n は正の整数とします。

$2^3\times2^5=(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2)=2^8=2^{3+5}$　このことから

$2^m\times2^n=2^{m+n}$

$(2^2)^3=2^2\times2^2\times2^2=(2\times2)\times(2\times2)\times(2\times2)=2^6=2^{2\times3}$　このことから

$(2^m)^n=2^{mn}$

$(2\times3)^4=(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)=2^4\times3^4$　これから

$(2\times3)^m=2^m\times3^m$

話を分かりやすくするために、2 や 3 で考えましたが、これらの式はどんな数 a、b に対しても成り立ちます。ただし、m、n は正の整数です。

$\mathbf{a^m a^n=a^{m+n}}$　・・・ ①

$\mathbf{(a^m)^n=a^{mn}}$　・・・ ②

$\mathbf{(ab)^m=a^m b^m}$　・・・ ③

この三つの式を「指数法則」と言います。

また、m＞n のとき、

$2^5\div2^3=(2\times2\times2\times2\times2)\div(2\times2\times2)=2\times2=2^2=2^{5-3}$　より、

$a^m\div a^n=a^{m-n}$ ・・・ ④

m＜n のとき

$2^3\div2^5=(2\times2\times2)/(2\times2\times2\times2\times2)=1/(2\times2)=1/2^{5-3}$

$a^m\div a^n=1/a^{n-m}$ ・・・ ④'

が成り立ちます。この④、④' はいずれ①に含まれることになります。

さて、ここからが数学らしい新たな展開になります。指数の m、n は今の段階では「正の整数」でした。それを 0 や負の数に広げるのです。2^3は 2 を 3 回掛け合わせるという、常識的に分かりやすい話でした。ところが 2 を 0 回掛けるとか、2 を－3 回掛けるというのは、常識の世界では考えにくいことです。数学では指数の m、n をできるだけ制約の無い数で使えるようにする必要があるために、まずは「正の整数」から「全ての整数」に拡張します（その後もっと高いレベルになると、この指数を有理数さらには無理数へと拡張します）。その拡張の仕方は次の様です。下の図を見ながら、まず、1 から始めて×2 を繰り返した数、1、2、4、8、16、・・・を並べます（二行目）。その下に指数を用いた表示で書きます（ただし $2=2^1$ 以降）。さらにその下に、使われた指数を書きます（やはり 2 以降）。最上段と最下段はそれぞれ数が×2 で増えていくこと、指数が＋1 で増えていくことを示して

います。$\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イ}}$が新たに考えようとしている箇所ですが、図を眺めていると、$\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イ}}$ にどういう数を入れるのが適当かが見えてきます。まずイは 0 で良さそうです。そしてアは今までにならった書き方をすれば、2^0 で良さそうです。そしてその 2^0 はその上が 1 であることから、$2^0=1$ と約束すると良さそうです。図は 2 の場合で説明しましたが、3 でも 5 でも何でも $a^0=1$ とするのが良さそうだ言うことは分かると思います。

	×2	×2	×2	×2	×2	×2	
1	2	4	8	16	32	・・・	
$\boxed{\text{ア}}$	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	・・・	
$\boxed{\text{イ}}$	1	2	3	4	5	・・・	
	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

一般に a が 0 でないとき（実は $a\neq0$ というのは重要な意味のある条件でその訳は後ほど）、

$a^0=1$　（ただし $a\neq0$）・・・ ⑤

としします。$3^0=1$、$10^0=1$、$(-5)^0=1$、といった具合に 0 以外のどんな数に対しても、その 0 乗は 1 です。

次に、図の左側を同じように埋めていきますが、下に示したようにするのが自然でしょう。指数を、-1、-2、-3、・・・としたときに表記の仕方はそのまま右肩に乗せ、数値は表にあるように、1/2、1/4、1/8、・・・とします。

×2	×2	×2	×2	×2	×2	×2	×2	×2	×2	×2	
・・・ 1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	・・・	
・・・ 2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	・・・	
・・・ -4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	・・・	
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

つまり、$2^{-n}=1/2^n$ とすると良さそうです。一般的な言い方をすると、整数 n に対して、

$a^{-n}=1/a^n$（ただし $a\neq0$） ・・・ ⑥

たとえば、$3^{-2}=1/3^2=1/9$、$(-4)^{-3}=1/(-4)^3=1/(-64)=-1/64$ です。

指数を⑤、⑥のように約束して 0 や負の範囲まで拡張しましたが、この約束の仕方でいけば、指数法則①～③は全ての整数 m、n で成り立ちます。

$3^4\times3^{-6}=3^{4-6}=3^{-2}$（$=1/3^2=1/9$）

$\{(-2)^3\}^{-2}=(-2)^{3\times(-2)}=(-2)^{-6}$（$=1/(-2)^6=1/64$）

$(5x)^{-3}=5^{-3}\times x^{-3}$（$=1/5^3\times1/x^3=1/125x^3$）

なお、④、④’が①に含まれることは、

$a^m\div a^n=a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$

と考えられることから分かります。つまり、指数を正の整数から 0 や負の整数に拡張するのに、⑤、⑥のような約束の仕方をすれば（数学では定義するという言い方をする）、すでにある公式にも矛盾せずに上手くいきます。

最後に⑤において、$a\neq0$ とした訳を考えます。$a=0$ として、0^0 をどのように約束すれば上手く扱

えるようになるか考えてみましょう。a^0 は 1 なので 0^0も 1 にするか、0^n は 0 なので 0^0も 0 にするか迷うところですが、結論から言うと、どのような値にもできません。

たとえば指数法則の①で、$0^0=0^{1-1}=0^1\times0^{-1}$ となりますが、$0^{-1}=1/0$ というあってはならない数が出てきてしまいます。そもそも⑥で $a\neq0$ としたのは分母が 0 となるのを避けているのです。従って 0 で割れないのと同じように、0^0 は数として定義できないものであって、除外しなければなりません。

(2) 対数の発明

いきなりですが、次の x に入る数は？

1) $2^x=8$

2) $x^4=16$

1) が 3 で、2) が 2 と－2 です。このように指数を使って表される方程式を指数方程式と言います。それでは次の式を成り立たせる x は何でしょう。

$2^x=5$ ・・・ ①

2 を何乗したら 5 になるか？ですが、そんな数は到底言えそうもありません。$2^2=4$ で $2^3=8$ なので、2 と 3 の間の数ということくらいは分かりますが、それ以上のことは分かりそうにありません。それでも数学では、そのように式で表せるということは現に数として存在しているはずですから、数として扱えなければなりません。こうしたところから新たな数学が始まります。

それでは、①の x の値をどのように表すかですが、その前この形で表される式に関してもう少し考えてみます。

$2^p=5$ ・・・ ②

とします。同じく

$2^q=7$ ・・・ ③

とします。②と③の辺々を掛け合わせると、

$2^p\times2^q=5\times7$

右辺は掛け算ですが、左辺は指数法則より 2^{p+q} ですから指数の足し算になっています。

今度は②の両辺を n 乗してみます。

$(2^p)^n=5^n$

右辺は累乗の形ですが、左辺は 指数法則より $(2^p)^n=2^{pn}$ ですから指数の掛け算になっています。

①のような指数の絡んだ方程式にも意味のある数を解として考えられるようにするために、そして計算機がまだ未発達の時代、掛け算が足し算で、累乗の計算が掛け算でできるなら計算がずいぶん楽になるということで、考案されたのがこれから話をする『対数』です（高校で習う）。ただし計算機が発達した現在では後者の意味合いは薄れました。

余談になりますが、昔ある大学の入試で「対数について説明せよ」というような問題が出され、対数が関係した難しい問題をいくらでも解く受験生の多くが、この問題に対する上手い解答を書けな

かったということがあったそうです。

$2^x=5$ を成り立たせるような x を数として表すために対数を考案したのです。

この式を成り立たせる x を、$x=\log_2 5$ と表すことにします。

$2^x=5 \Leftrightarrow x=\log_2 5$

一般的に次のように約束します。

$a^x=P \Leftrightarrow x=\log_a P$ （ただし、$P>0$ で、$a>0$、$a\neq 1$）

さて対数を用いて表された $x=\log_2 5$ ですが、この数がどんな数かはまだ今の段階では見当が付きません。対数の話をもう少し進めると考えられるようになります。

指数が乗っかる元の数（対数の底という）を 10 にしてみます。

$10^x=P \Leftrightarrow x=\log_{10} P$

たとえば、$10^2=100$ なので、$\log_{10}100=2$ です。$10^5=10000$ なので、$\log_{10}10000=5$ です。また、$10^0=1$ なので、$\log_{10}1=0$ です。このように 10 を元に考えると分かりやすいです（我々は十進法に慣れているので）。それでは、

$10^x=50$ の解 $x=\log_{10}50$ の値は何か。

$10^1=10$ で $10^2=100$ なので、x は 1 と 2 の間の数になりそうです。パソコンの関数電卓（Windows の場合は「アクセサリー」にある。「表示」で「関数電卓」を開く）を使うと求めることができます。

50 と入れた後に $\boxed{\text{log}}$ キーを押すと、1.69… という $\log_{10}50$ の値が求められます。つまり、$10^{1.69\ldots}=50$ というわけです。関数電卓には10を底にした対数の値の計算が組み込まれているのです。対数計算（対数を用いて掛け算や累乗の計算を楽に行う）では普通このように底を10にした対数が使われます（これを常用対数という）。

それでは、$2^x=5(x=\log_2 5)$の x を電卓で求めるにはどうすればよいかですが、その前に対数の性質を知っておく必要があります。

$a^x=P \Leftrightarrow x=\log_a P$ において

$P^n=(a^x)^n=a^{xn} \Leftrightarrow xn=\log_a P^n$

よって、

$n\log_a P=\log_a P^n$（対数において、P^n の n は前に出せる）

たとえば、$\log_2 5^3=3\log_2 5$、$\log_{10}10000=\log_{10}10^4=4\log_{10}10=4$ です。

もうひとつ、

$x=\log_a b \Leftrightarrow b=a^x$ において、$c>0$、$c\neq 1$ として

$\log_c a^x=\log_c b$

$x\log_c a=\log_c b$

$x=\log_c b/\log_c a$

よって、

$\log_a b=\log_c b/\log_c a$ （対数の底を c に変換した）

これを使うと、$2^x=5$ の解 $x=\log_2 5$ は底を 10 に変換して、

$x=\log_2 5=\log_{10}5/\log_{10}2$ とできるので、電卓の対数で求められます。

$\boxed{5}\boxed{\log}\boxed{/}\boxed{2}\boxed{\log}\ \boxed{=}$ で、2.32… と求められます。試しにこの計算結果を$\boxed{M+}$ でメモリーに入れ（メモリーに解 x の値が入った）、$\boxed{2}\boxed{x^y}\ \boxed{MR}$ としてみて下さい。5 になるはずです。

さて、うんざりするような話が続いてしまいましたが、話したかったのはこれからのことで、そのために対数の説明をしました。

2^{64} がはたしてどれくらいの数になるか。計算した経験が無ければ恐らく誰にも想像できないでしょう。対数を使うとその場で簡単におよそどれくらいの数か見当が付きます。ただし、およその意味は桁数が分かるということです。

$x=2^{64}$ とします。両辺それぞれの常用対数を考えます。

$\log_{10}x=\log_{10}2^{64}$

$\log_{10}x=64\log_{10}2$

関数電卓で $\log_{10}2$ の値を求めると、0.3010… ですが、ここでは 0.3 で十分です。

$\mathrm{Log}_{10}x=64\times0.3=19.2$

$19<\log_{10}x<20$

（たとえば、$\log_{10}x=3$ なら $x=10^3$ ですから）

$10^{19}<x<10^{20}$

となり、x が 20 桁の数であることが分かります（$10^2<x<10^3$ なら、x は 3 桁の数）。

これを知っていれば、§15 にあったような問題が出ても平気で答えられます。

つまり、2^n がどれくらいの数か(桁数がいくつか)を知りたいときは、$0.3\times n$ を計算して、その整数部分に 1 を足せば桁数が分かります。

たとえば、2^{30} は、$0.3\times30=9$ ですから、10 桁（十億）の数と分かります。

2^n で表される数の桁数は 0.3（$\log_{10}2$ の値）を覚えておけばすぐに求められます。