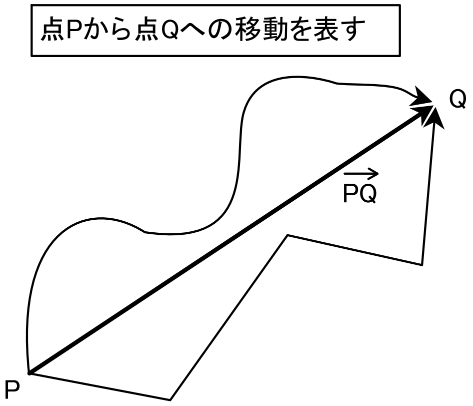
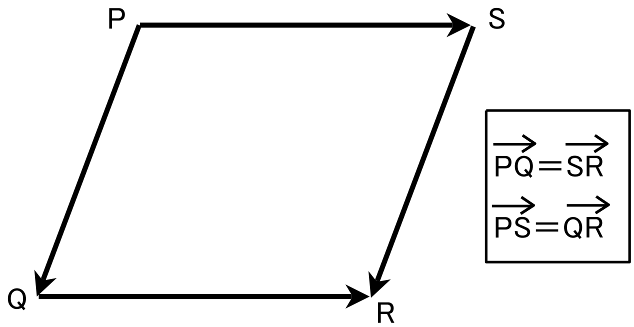
§21. 次元を問わないベクトルの世界（直線、平面、円、球面の方程式）



平面上において、ある点 P の（別の）ある点 Q への『移動』をベクトル PQ と言って$\overrightarrow{PQ}$で表すことにします。平面上としましたが、それはイメージし易くするためであって、実は空間でもかまいません（そのようなことに関しては後ほど）。また単に移動なのでその過程が曲がりくねっていようと、折れ線を繰り返していようと最短の直線であろうと問題にはしません。そうであるとしたらわざわざ複雑にする必要はないので、点 P から点 Q へ向かう直線的な矢印で表すことにします（図）。



身近な例として天気図に登場する風の表示が分かりやすいです。風の向きは矢印の方向ですし、風の強さは矢印の長さあるいは羽の数で表します。つまり風が一秒間にどれくらい移動するかを矢印で表します。この風の例からも分かるように、『移動』そのもは『方向』と『大きさ』が問題なので、その二つの要素が等しければ移動の出発点が異なっていても（どこに表示しても）すべて等しいということになります。

（図）たとえば平行四辺形 PQRS において、PQ＝SR で PQ // SR なので、$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$です。同様に$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$です。

ベクト$\overrightarrow{PQ}$において元の点（移動の出発点）を始点、移動後の点を終点と言います。本文の一行目で、（別の）と（　）にしたのは始点 P と終点 Q が一致した場合のことを考慮したもので、そのような移動をゼロベクトルと言って$\vec{0}$で表すことにします。また$\overrightarrow{PQ}$に対して、始点と終点を入れ替えたベクトル$\overrightarrow{QP}$をベクトル$\overrightarrow{PQ}$の逆ベクトルと言って、$-\overrightarrow{PQ}$で表します（注：$\overleftarrow{QP}$というような書き方はしません）。ベクトルは特に始点、終点を問題としないときは、アルファベットの小文字を用いて$\vec{p}$、$\vec{a}$などと表すこともあります。

点 P が点 Q へ移動する際、別の点 R を経由したとしても結果的には P から Q への移動になるので、このことからベクトルの和が次のように定義されます（図）。

$\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PQ}$

また、この和の定義から差が次のように定義されます。

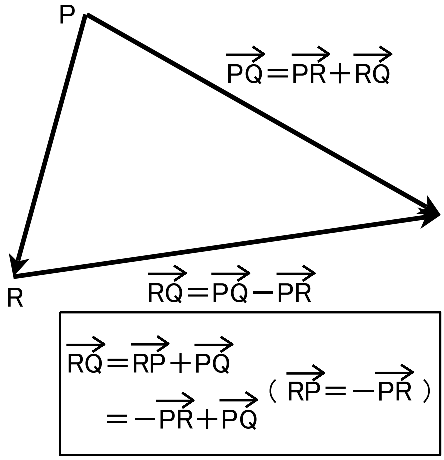
$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RQ}$

こうしたことから、平行四辺形 PQRS において（前ページ図）、次のような等式が成り立ちます。

$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}$

$\quad=\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PS}$



次にベクトル$\vec{p}$ の実数倍の約束です。k を実数としたとき、次のように定義します。

$$k\vec{p}=\begin{cases}(k>0\text{ のとき})\cdots\vec{p}\text{ と同じ方向で長さが }k\text{ 倍のベクトル}\\(k=0\text{ のとき})\cdots\vec{0}\\(k<0\text{ のとき})\cdots\vec{p}\text{ と逆方向で長さが}-k(=|k|)\text{倍のベクトル}\end{cases}$$

ベクトルの和、差は普通の文字式の計算と同じように行います。

m、n を実数として、

$(m\pm n)\vec{p}=m\vec{p}\pm n\vec{p}$

$m(\vec{p}+\vec{q})=m\vec{p}+m\vec{q}$

ベクトルどうしの積は二通り（内積と外積）ありますが、内積に関しては後ほど紹介します。外積は大学で習います。なおベクトルどうしの商は定義されません。

ベクトルの大きさは絶対値記号を用いて、次のように表します。

$|\overrightarrow{PQ}|$:$\overrightarrow{PQ}$ の大きさ

ゼロベクトルでないベクトルを自分自身の大きさで割ると、そのベクトルと同じ向きの長さ 1 のベクトルになります。長さ 1 のベクトルを単位ベクトルと言います。

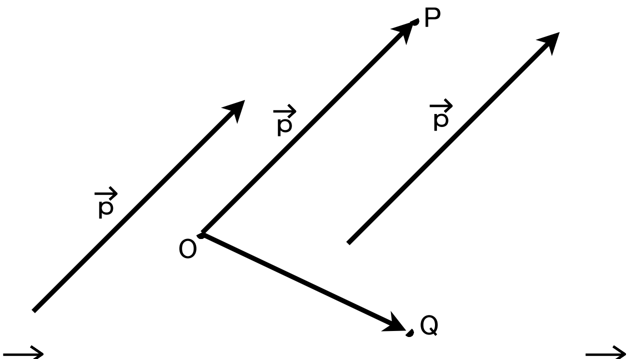
$\overrightarrow{PQ}\,/\,|\overrightarrow{PQ}|$:$\overrightarrow{PQ}$ 方向の単位ベクトル

$\vec{p}\,/\,|\vec{p}|$:$\vec{p}$方向の単位ベクトル

長々と前置き（準備）が続きましたが、ここからがいよいよ本番です。

＜位置ベクトル＞

平面上において、一つの点を定めて O とします。ベクトルは方向と大きさが同じならば全て等しい（つまり自由に平行移動出来る）わけですが、始点をこの点 O と決めれば、一つのベクトルに対して平面上の一つの点が決まります。逆に平面上の任意の点 Q に対



$\overrightarrow{OP}$: 点Pの位置ベクトル、点Qの位置ベクトルは $\overrightarrow{OQ}$

して、ベクトルが$\overrightarrow{OQ}$決まります。つまり、平面上の点とＯを始点とするベクトルとが１対１の対応をなします。このような考えに基づくベクトルを平面上の（実は空間でも同じ）位置を表すことから、位置ベクトルと言います。

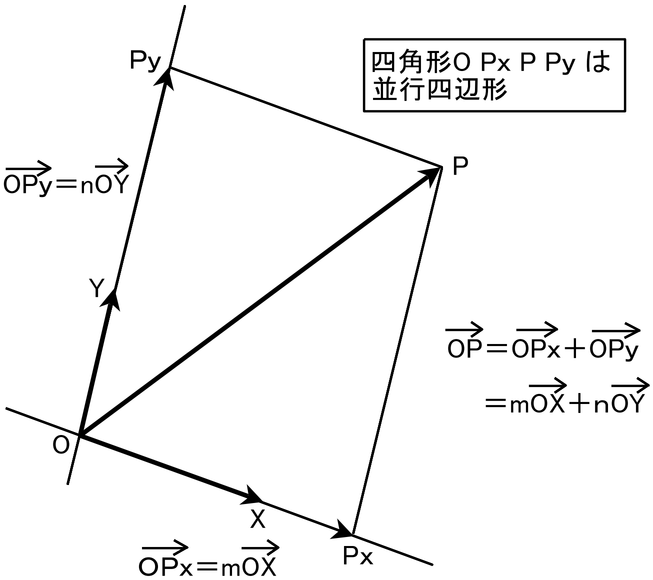
（注：上のことから分かるように、平面上の任意のベクトルに対して、それに等しい位置ベクトルは一つ対応する）

＜一次結合＞

二つの位置ベクトル、$\overrightarrow{OX}$、$\overrightarrow{OY}$がどちらもゼロベクトルでなく、平行でないとします。このとき、任意の位置ベクトル$\overrightarrow{OP}$は、ある二つの実数 m、n が存在して、

$\overrightarrow{OP}$＝m$\overrightarrow{OX}$＋n$\overrightarrow{OY}$ ・・・ ①

と表すことが出来ます。図を見ればそのように出来る訳はすぐに理解できるでしょう。また、その時の m、n の組み合わせは一通りに限られることも分かるでしょう。このような表わし方をした式を、$\overrightarrow{OX}$と$\overrightarrow{OY}$の一次結合と言います。つまり平面上の任意のベクトルは、$\overrightarrow{OX}$と$\overrightarrow{OY}$の一次結合で一通りに表せるというわけです。



（注 1：空間の場合は三つのベクトルの一次結合で表せる）

（注 2：$\overrightarrow{OX}$、$\overrightarrow{OY}$のどちらかが$\vec{0}$だったり、両者が平行の場合は①のように一次結合で表せない。このような二つのベクトルは『一次独立』でないと言う）

＜例題：線分の内分点の位置ベクトル、三角形の重心の位置ベクトル＞

例題1］ 平面上の二点 P_1、P_2を結ぶ線分を $m_1:m_2$ に内分する点 Q

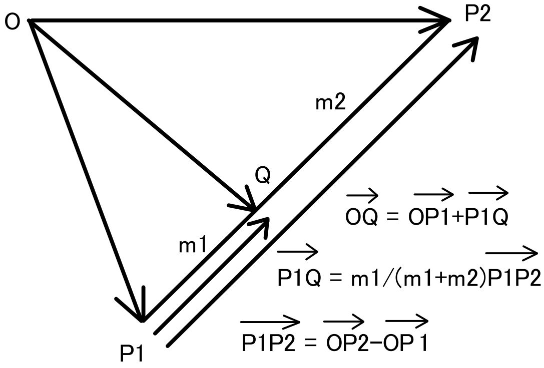
点 O を原点とする位置ベクトルで考える。$P_1Q:QP_2＝m_1:m_2$ より、$\overrightarrow{P1Q}$＝$m_1/(m_1+m_2)\overrightarrow{P1P2}$、

$\overrightarrow{OQ}＝\overrightarrow{OP1}＋\overrightarrow{P1Q}＝\overrightarrow{OP1}＋m_1/(m_1+m_2)(\overrightarrow{OP2}−\overrightarrow{OP1})$

$＝\{(m_1+m_2)\overrightarrow{OP1}+m_1(\overrightarrow{OP2}−\overrightarrow{OP1})\}/(m_1+m_2)$

$＝(m_2\overrightarrow{OP1}+m_1\overrightarrow{OP2})/(m_1+m_2)$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}＝(m_2\overrightarrow{OP1}+m_1\overrightarrow{OP2})/(m_1+m_2)}$



（m_1とm_2がたすき掛け状態）

注）特に、m_1＝m_2、即ち点Qが線分P_1P_2の中点の場合、$\overrightarrow{OQ}$＝($\overrightarrow{OP1}$＋$\overrightarrow{OQ2}$)/2。また、m_1とm_2が異符号のときは外分点となる。

例題2] △ABCの重心G

辺BCの中点Mとする。重心Gは線分AMを2:1に内分する点。

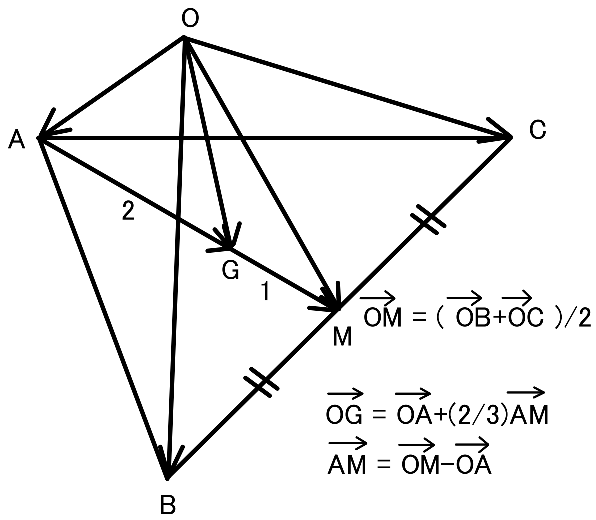
$\overrightarrow{OM}$＝（$\overrightarrow{OB}$＋$\overrightarrow{OC}$)/2 、$\overrightarrow{AG}$＝2/3$\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OG}$＝$\overrightarrow{OA}$＋$\overrightarrow{AG}$

＝$\overrightarrow{OA}$＋2/3($\overrightarrow{OM}$－$\overrightarrow{OA}$)

＝（3$\overrightarrow{OA}$＋2（$\overrightarrow{OB}$＋$\overrightarrow{OC}$）/2－2$\overrightarrow{OA}$)/3

＝($\overrightarrow{OA}$＋$\overrightarrow{OB}$＋$\overrightarrow{OC}$)/3



＜ベクトル方程式＞

平面（二次元）および空間（三次元）における、直線、円（三次元では球）を考えます。

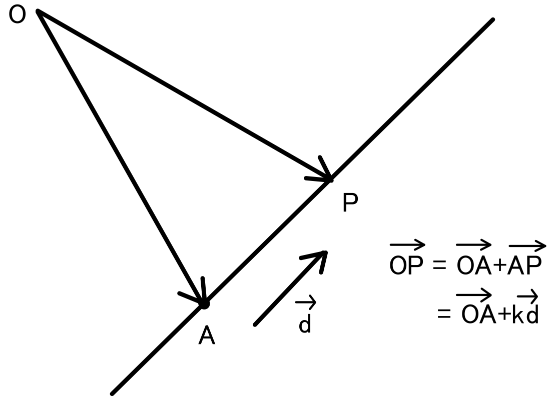
ｉ）点A通ってベクトル$\vec{d}$に平行な直線

直線状の任意の点を P とします。$\overrightarrow{AP}$ // $\vec{d}$ ですから、ある実数kを用いて、

$\overrightarrow{AP}$＝k$\vec{d}$ と表せます。

$\overrightarrow{OP}$＝$\overrightarrow{OA}$＋$\overrightarrow{AP}$ ですから、

$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\vec{d}}$ **・・・** ①



これがの直線のベクトル方程式です。任意の実数kに対して、①を満たす点 P は この直線上にあることを確認してください。①が平面でも空間でも成り立つことは理解できるでしょう。

（後ほど、点Pを通って$\vec{n}$ に垂直な直線を考えます）

ｉ）’ 二点A、Bを通る直線

$\overrightarrow{AB}$＝$\vec{d}$ として①を用いれば直ちに求まります。

$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}$ **・・・** ①’（平面、空間）

ⅱ)点 C を中心とする半径 r の円(球)

円周上の任意の点を P とすると、CP=r 。したがって、|$\overrightarrow{CP}$|=r 。これから、

|$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}-\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}$|$=\mathbf{r}$ ･･･ ②

これが、円(球)の方程式です。特に中心が原点であれば、$\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ですから、

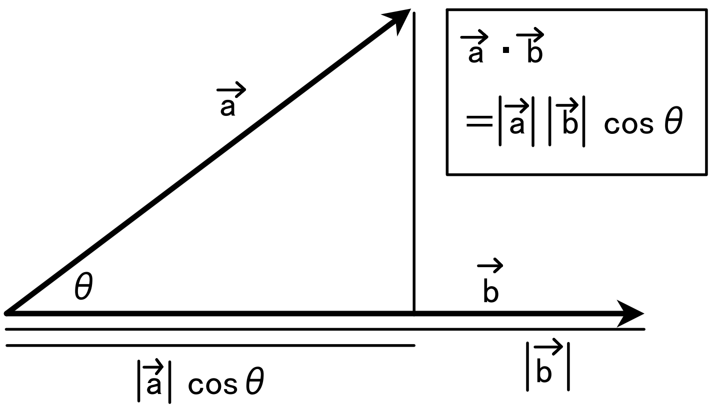
|$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$|$=\mathbf{r}$ ･･･ ③

(②、③は三次元空間になってもまったく変わりません。したがってそれぞれそのまま点 C を中心とする球面、原点を中心とする球面の方程式になります)

＜ベクトルの内積＞

次にベクトルの内積を説明します(何故単に『積』でなく『内』が付くのかというと、ベクトルの『外積』も定義されるから)。ベクトルを知ったからには、是非ともこの内積も理解したいものです。

内積は大きな活躍をします。まず最初の例ですが、平面上の直線、空間における平面を表す一つの手段としてこの内積が用いられます。



二つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$ の内積は次のように定義されます。三角関数の余弦(コサイン)を用いるのですが、§26 で cosθ の意味を確認してください。ここではその章を全部読むことはありません。

$\vec{a}$、$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、二つのベクトルの内積を、

$$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=|\vec{\boldsymbol{a}}|\,|\vec{\boldsymbol{b}}|\cos\theta$$

と定義します。内積は二つのベクトルの間に･を入れて表します。また内積は二つのベクトルの積ではありますが、演算の結果は実数値です(このことの認識は重要!)。

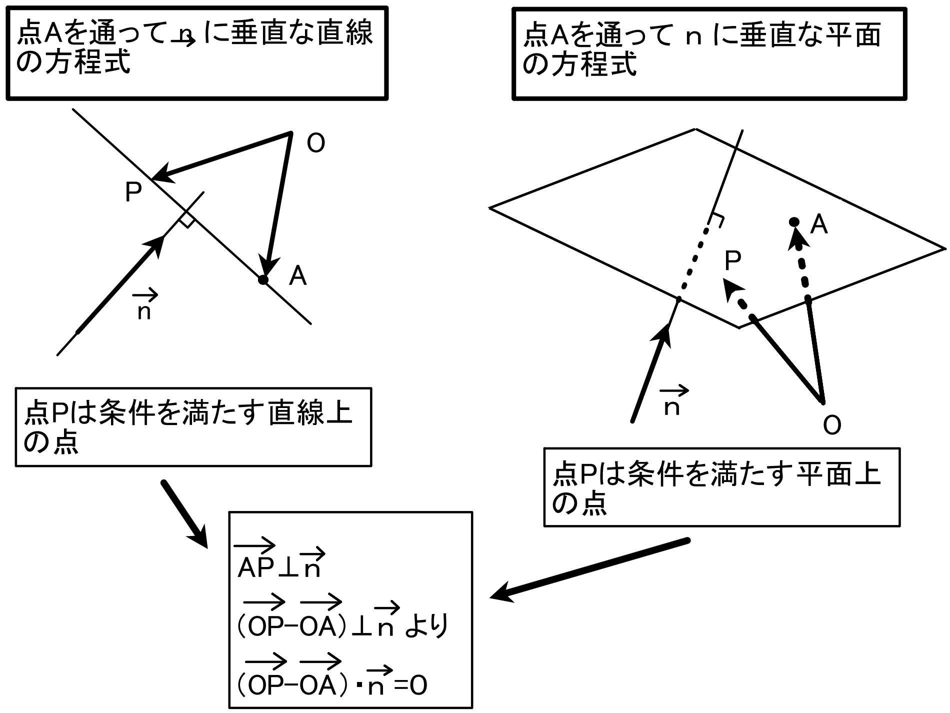
|$\vec{a}$|cosθ は図のように、$\vec{a}$の$\vec{b}$を含む直線上への射影になっています。つまりこの射影の大きさと$\vec{b}$の大きさの積が内積です。勿論$\vec{b}$の$\vec{a}$を含む直線上への射影で考えても同様です。

注) 物理で物体を移動させる仕事でこの内積が使われる。内積は物体を$\vec{a}$の力で$\vec{b}$の分だけ移動する仕事量。射影の意味が分かりやすい)

内積の値は cosθ の関係で、0°≦θ＜90°の時はプラス、90°＜θ ではマイナスです。そして一番肝心なのは θ＝90°のとき cosθ＝0、すなわち内積の値が 0 となることです（移動させたい方向に対して直角の向きに力を加えても仕事にならない！）。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ （cosθ＝0）

ベクトルの内積を用いると、平面における直線、空間における平面の方程式を求めることができます。



ⅲ）点 A を通って $\vec{n}$ に垂直な直線

注） 空間ではそのような直線は一本に定まらないので不可

直線上の任意の点を P とします。$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ より、

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\vec{n}=0$ ・・・ ④

ⅳ）点 A を通って $\vec{n}$ に垂直な平面

ⅲ）とまったく同様のことを空間で考えると、平面になります。

平面上の任意の点を P とします。$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ より、

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\vec{n}=0$ ・・・ ⑤

ある種の直線および円（球）が平面でも空間でも同じように考えられるというのが、ベクトルの大きな特徴の一つです。

最後に、ここまでベクトルを考えてきた平面（、空間）に x、y（、z）座標軸を入れて、ベクトル方程式と座標平面（空間）の方程式の関係を見ていくことにします。その際、上で定義し

た内積を使いますが、座標平面（空間）でどのように表されるかやってみましょう。まず、

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

において、
$\vec{a}=\vec{b}$
としてみます。$\theta=0°$より、$\cos\theta=1$。よって、
$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2}$ ・・・（※1）
これは内積における非常に重要な式です。
それでは話をまず分かりやすく平面の場合で考えます。位置ベクトルの原点をそのまま原点として座標軸 Ox、Oy を取り入れます。今後断りがない限りベクトルは始点が原点にあるものとします。すると、ベクトルの終点が座標面上の点の座標と対応します。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1, a_2)$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1, b_2)$ とします。

$AB=|\vec{a}-\vec{b}|$ ですが、$|\vec{a}-\vec{b}|^2$ を（※1）を用いて計算すると、

AB^2

$=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$　　　注）内積の演算は文字式と同様に行う

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ ・・・（ア）

一方ピタゴラスの定理から、AB の長さを A、B の座標で計算すると、
$AB^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$
$=a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2-2(a_1b_1+a_2b_2)$
$=OA^2+OB^2-2(a_1b_1+a_2b_2)$ ・・・（イ）
（ア）、（イ）から、

$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$ ・・・（※2）

これもベクトルの内積を座標で表す重要な式です。
なお、計算は省略しますが、空間における内積は次のようになります。

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$、$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ のとき、

$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$ ・・・（※3）

＜各種ベクトル方程式を x、y（、z）平面（空間）の方程式に書き換える＞

① $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\vec{d}$（平面上の直線、空間の直線）

P(x、y)、A(a_1、a_2)、$\vec{d}$＝(d_1、d_2)とする。(以下重複は避ける)

(x、y)＝(a_1、a_2)＋k(d_1、d_2)
＝(a_1+kd_1、a_2+kd_2)
$x=a_1+kd_1$
$y=a_2+kd_2$
これは、k を仲立ちとして x、y の間の関係を示す直線の方程式です。このときの k を媒介変数(パラメータ)と言います。この k を消去すると、
$(x-a_1)/d_1=(y-a_2)/d_2$
となります。さらに書き換えて
$y-a_2=d_2/d_1(x-a_1)$

(ただし、$d_2\neq0$。d2＝0 のときは、$y=a_2$)となります。これは、傾きが$\vec{d}$の傾きで点 A(a_1、a_2)を通る直線の方程式です。

（注：$\vec{d}$を直線の方向ベクトルという）

空間の場合は、P(x、y、z)、A(a_1、a_2、a_3)、$\vec{d}$＝(d_1、d_2、d_3) とすると、

$x=a_1+kd_1$
$y=a_2+kd_2$
$z=a_3+kd_3$
となりますが、これから、
$(x-a_1)/d_1=(y-a_2)/d_2=(z-a_3)/d_3$
となり、二本の等式で表されます。このことの意味は、このあと平面の方程式を見るとよく分かります。

②、③ $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}|=r$（平面上の円、空間の球）
P(x、y)、C(c_1、c_2)とします。式の両辺を二乗してピタゴラスの定理から(あるいは内積の式から)、
$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$
という円の方程式が求まります。空間の場合は C(c_1、c_2、c_3)とすると、同様に
$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2$
という球の方程式になります。

④ $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\vec{n}=0$（平面上の直線、空間の平面）
まず平面で考えます。直線の方程式が求まります。
$\vec{n}$＝(n_1、n_2) とします。$\vec{n}$が$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP}$＝($x-a_1$、$y-a_2$)と垂直ですから、内積を計算し

て0とします。

$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$

展開して整理すると、

$\mathbf{n_1x+n_2y+s=0}$　（ただし、定数項の部分をｓとした）

という、x、y の一次方程式になります。注意すべきはｘの係数とｙの係数が直線に垂直なベクトルの成分であることです。$\vec{n}$を直線の**法線ベクトル**と言います。

次に空間で考えます。平面の式が求まるはずです。

$\vec{n}=(n_1, n_2, n_3)$とします。$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-a_1, y-a_2, z-a_3)$より、上と同様に考えて、

$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$

展開して整理すると、

$\mathbf{n_1x+n_2y+n_3z+s=0}$　（ただし、定数項の部分をｓとした）

という、x、y、z の一次方程式になります。これが空間における平面の方程式です。x、y、z の係数が平面に垂直なベクトル$\vec{n}$の成分になっています。空間における平面の方程式が x、y、z の一次方程式で表されることが分かりました。

①で、空間における直線が二本の方程式で表されると言う話がありましたが、ここへ来てその理由が分かると思います。二本の式はいずれも x、y、z の一次方程式でしたが、それぞれが平面の方程式だったわけです。つまり空間の直線が二つの平面の交線（共通部分）で表されていたわけです。

例題］三角形において、各頂点から引いた三本の垂線は一点で交わる。

証）

三角形OABにおいて、Aから辺OBに引いた垂線とBから辺 OA に引いた垂線の交点をHとする。

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　⇒

$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$　⇒

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　・・・①

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ ⇒

$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$ ⇒

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$　・・・②

①－②

$\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

$\therefore\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

OH⊥AB