§20. 何が必要で何が十分なのか（重要な同値の意味）

まず「必要条件」、「十分条件」についてです。

数学では、「必要条件」、「十分条件」という用語が非常に重要な意味を持っています。ところが、我々が日常用いる「必要」、「十分」と照らし合わせようとすると、時として混乱を招き、間違えてしまうことがあります。日常的なところから、数学での使われ方へと話を進めていきます。

まずは、分かり易い日常的な使い方からです。ある『免許を取得する』条件が、＜学科試験で合格すること＞、＜実技試験で合格すること＞、＜面接試験に合格すること＞の三つ全てをクリアすることだったとします。ただし、三つの条件は受ける順番や段階は問わないものとします。

ある人がこの『免許を取得する』ための試験に臨んだとして、＜学科試験で合格すること＞は『免許を取得する』ために「必要」ではありますが、それだけでは「十分」ではありません。他の条件についても同様ですし、三つのうちのどれか二つであっても同じような言い方になります。例えば、＜実技試験で合格すること＞、＜面接試験に合格すること＞は『免許を取得する』ために「必要」ではありますが、それだけではまだ「十分」とは言えません。三つの試験すべてに合格して初めて、『免許を取得する』ために「十分」だと言えます。

通常我々は「必要」、「十分」という言葉の意味をこのような使い方をするものとして理解しています。ところが、このような感覚で数学の「必要条件」、「十分条件」の問題に取り組むと、混乱してしまったり、分からなくなってしまったりということがしばしばあります。それでは話をすすめていきますが、その前に、話の中に出てくる「命題」という用語について触れておきます。「命題」という単語は日常的にはあまり登場する機会はありませんが、数学的には重要な用語です。数学における「命題」とは、

『～～は（ならば）、～～である』

という言い方で表現できる事柄で、数学的にあるいは常識的に真であるか偽であるかを断定できるもを言います。例えば、

1） 三角形は内角の和が 180°である。

2） AB＞0 ならば A＞0、B＞0 である。

のようなものです。1）は真の命題、2）は偽の命題です。

> 注）たとえば「アキレスは足が速い」とか「五角形は美しい」いうのは数学的には真とも偽とも言えることではないので、数学においては「命題」とは言いません。

「は（ならば）」より前にある部分を命題の「仮定」、後にある部分を「結論」と言います。上の1）の例では、仮定が『三角形（である）』、結論が『内角の和が 180°（である）』です。2）では、仮定が『AB＞0』、結論が『A＞0、B＞0』です。命題が真であるというためには、そのことを証明しなければなりません。偽であるというためには、仮定を満たすものの結論が成り立たないような具体例を一つ挙げれば証明になります。そのような例のことを反例と言います。上の 2）では、例えば、A＝－1、B＝－2 を反例として挙げれば（一つでよい。このような反例はいくらでもある）、この命題は偽であると言えたことになります。

さて、それでは「必要」、「十分」の話に戻ります。命題において、仮定に相当する部分を「P」、『ならば』を「→」で表し、結論に相当する部分を「Q」で表すことにします。すると、命題は一般に、

P → Q

と表すことが出来ます。仮にこの命題が真である場合、

Q は P(であるため)の必要条件

P は Q(であるため)の十分条件

であるといいます。これは数学独特の約束と割り切って考えた方が良いです。最初にも触れましたが、必要とか十分の意味から捉えようとすると、P、Q の部分が数学的なものだけに余計に訳が分からなくなることがあります。数学から離れた次のような例で考えると、分からなくもないでしょう。

東京(P) → 日本の都市(Q) (東京である ならば 日本の都市である) ・・・ ①

これは真の命題です。上の約束に従うと、「日本の都市である」(Q)は「東京である」(P)ための必要条件ということになりますが、まずこのことについて考えてみます。

「東京である」ための〜〜、ですから「東京である」が断定すべき事柄であり、このことを確保するためには Q は何でなければならないかということになります。Q の部分は、「アメリカの都市」とか「中国の都市」というわけにはいかず、「日本の都市」であることが必要になります。

次に、「東京である」(P)は「日本の都市である」(Q)ための十分条件ですが、これは次のように考えられます。

「日本の都市である」ための〜〜、ですから、このことを断定的に確保するために P は何でなければならないかと考えますが、今度は必ずしも「東京である」必要はありません。日本の都市は他にいくらでもあり、「横浜である」でも「札幌である」でも差支えなく、「東京である」としてやれば十分です。

それでは、数学における命題で考えてみます。

P:A>0、B>0 → Q:AB>0

これは真の命題です。従って、「AB>0」は「A>0、B>0 」(であるため)の必要条件であり、「A>0、B>0」は「AB>0」(であるため)の十分条件です。これを、上の②のように必要、十分の単語の意味で捉えようとすると、先程より分かりにくいものになります。P、Q が数学的に複雑になったりすると、余計に混乱しかねません。従ってその命題が真の場合、「〜〜は」という主語の立場に立って、矢印が向かってくるならば「必要条件」、矢印が出ていくなら「十分条件」という具合に、機械的に判断すると良いです。

なお今の命題は、P ← Q は真ではないので、P は Q の必要条件ではないですし、Q は P の十分条件ではありません。

もう一つ付け足しますが、日本語は表現の仕方がいろいろあるので、「必要」、「十分」が絡んだ言い回しでは、誤解しないように意味合いをきちんと捉えなければなりません。たとえば、

「P は Q であるための必要条件」(これが最も標準的で誤解されない言い方)

を、次のような言い方をすることもあります。

「Q であるためには P が必要」

とか、

「Q の必要条件は何か？に対して P(一つだけかもしれないしもっとあるかもしれない)」

といったような言い方をすることがあります。

次に、「同値」についてです。
たとえば、上の命題①の Q の部分が「日本の首都」の場合は、
P:東京 と Q:日本の首都 において、
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow P$ のどちらも真になります。この場合は、P は Q(であるため)の「必要十分条件」という言い方をします。同じく、Q は P の必要十分条件です。P、Q がこのような関係にあるとき、

『P と Q は「同値」である』

という言い方をします。この同値というのは数学において非常に重要な意味のある「用語」です。例として、次の式(方程式)を成り立たせる x を求めてみましょう。同値の意味を理解するためです。

$\sqrt{x+1}=x-1$ ・・・ ②

注)x を求める方程式だが、このように未知数 x が√の中にある場合、無理方程式という言い方をする。

まず√をなくすために、②の両辺を二乗します。

$x+1=(x-1)^2$
$x+1=x^2-2x+1$
$x^2-3x=0$
$x(x-3)=0$
$\therefore x=0、3$

というわけで、②を成り立たせるはずの x の解として、0 と 3 が求まりました。この x が③を成り立たせるか確かめてみます。
x=3 のとき、
②の左辺$=\sqrt{3+1}=2$、右辺$=3-1=2$　　よって成り立ちます。
x=0 のとき、
②の左辺$=\sqrt{0+1}=1$、右辺$=0-1=-1$　　これは成り立ちません！

このような間違いが生じたのは、解く過程において何か正しくないことをしてしまったからですが、それがどこかと言えば「両辺を二乗する」、ここしかありません。簡単な例で説明します。
$P: x=1$　　$Q: x^2=1$　・・・ ③
において、$P \rightarrow Q$ は明らかに真です。ところが、$x^2=1$ の解は、$x=\pm1$ なので、$Q \rightarrow P$ は偽です。反例は $x=-1$ です。
$P \rightarrow Q$ は真ですが、$Q \rightarrow P$ は真ではない、ということは、P と Q は同値ではないということになります。

「両辺を二乗すると、式の変形において同値性が崩れる」

これはきわめて重要なことです。上の例のように、求めた解が元の式を成り立たせないということが起こり得るのです。

§1 にあった例をもう一度確認します。

$\sqrt{2}/2=-\sqrt{2}/2$ が成り立つことを示す。
証明]
$x=\sqrt{2}/2$ ・・・ ④
とおく。両辺 2 倍して、
$2x=\sqrt{2}$・・・ ⑤
④、⑤の辺々を掛け合せると(※1)、
$2x^2=1$
となります。両辺から$\sqrt{2}x$ を引いて
$2x^2-\sqrt{2}x=1-\sqrt{2}x-x$
$\sqrt{2}x(\sqrt{2}x-1)=-(\sqrt{2}x-1)$
$\therefore\sqrt{2}x=-1$ (※2)
よって、$x=-\sqrt{2}/2$ となるから、④より、$\sqrt{2}/2=-\sqrt{2}/2$ が成り立つ。証明終り。

問題となる個所は二か所あります。一つは(※2)のところで、その章で説明したように、「0 で割ってはいけない」ということでした。もう一つは、④、⑤の両辺を掛け合わせるところです。これは x の二乗を計算していることになるからで、そのために、元の式を成り立たせない $x=-\sqrt{2}/2$ という解が出てきてしまったのです。

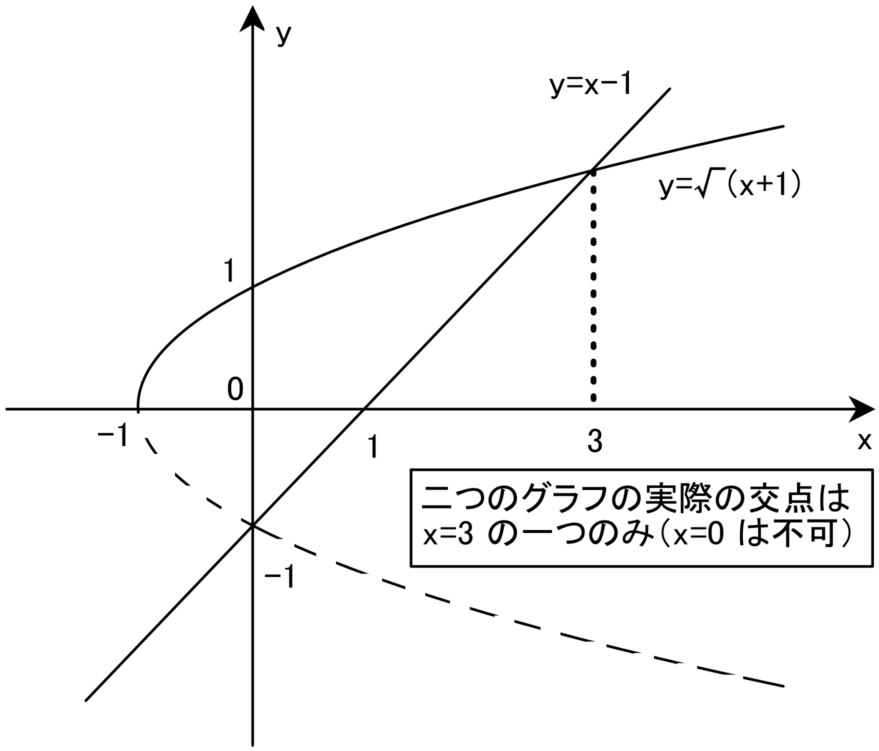
このような間違いを起こさないためには(同値性を保つためには)、両辺を二乗する時点で条件を新たに加えるようにします。上の例で言うと、(※1)のときに、「ただし、④より、$x>0$」とします。そうすれば、(※2)の時点で、「$x>0$ より、これは不適」と出来ます。

また、③の例では、$Q:x^2=1$、$x>0$ とすれば、P と Q は同値になります。

②の例では、両辺を二乗する以前の問題ですが、まず√の中は0以上でなければなりません。従って $x\geqq-1$。次に両辺を二乗する時点で、②において、左辺≧0 だから右辺≧0 より、$x\geqq1$ です。これらのことから $x\geqq1$。従って、この $x\geqq1$ という条件を押さえておけば、同値性が崩れないので、間違った解は避けられます。最後に $x=0$、3 とでますが、$x\geqq1$ より、$x=3$ が答えです。

なお、この②の問題をグラフで見ると、$x=0$ が不適であることを目で確かめることが出来ます。問題の解は、$y=\sqrt{x+1}$)のグラフと、$y=x-1$ のグラフの交点(の x 座標)と考えられますが、$x=0$ はグラフとしては現れない $y=\sqrt{x+1}$の点線部分と $y=x-1$ との交点だったのです(次ページの図)。

注)$y=\sqrt{x+1}$)のグラフは次のように考える。
まず $y\geqq0$ であることに注意
両辺を二乗して
$y^2=x+1$
$x=y^2-1$
y 軸を横軸、x 軸を縦軸にして放物線を描く(y 軸は左方向がプラスであることに注意)。$y\geqq0$ だから、x 軸の下の部分は消える。


y
y=x−1
y=√￣(x+1)
1
0
−1
1
3
x
−1
二つのグラフの実際の交点は
x=3 の一つのみ（x=0 は不可）