§1. 数学における絶対的なる掟(0 で割るな)

もうかなり昔のことですが、電車の中で実際にあった話です。私の後ろに立っていた父と子の会話が耳に入ってきたのですが、どうやら数学の問題を解いているらしいのです。二人の視線の先に目をやると、そこにはどこかの塾のチラシが貼られていて、「問題」(ある私立中の入試問題)が載っていました。それはこういう問題でした。

『 A、B、C、D、E、F、G はすべて異なる数で、0 から 6 までのいずれかの整数を表す。下の①～④の関係が成り立つとき D は何か。

D＋B＝D ･･･ ①
D－C＝A ･･･ ②
B×C＝B ･･･ ③
G÷F＝E ･･･ ④ 』

父と子の会話。(子供は小学 5、6 年生？太郎君とする)
父「太郎、①からまず何が分かる？」
太郎「えーと、B は 0 だね」
父「そうだ。あとは③からも何かすぐ言えそうだ」
太郎「C は 1」
父「うん、ここまでは簡単だ。C しか分かっていないから、②からは D が A より 1 大きいことしか分からない。④からはどうだ？ちょっと難しいかな？」
太郎「G も F も E も一つも分かってないんでしょう。何も出ないよ」
父「そうかな？E、F、G は 0 から 6 の異なる数で、④は G＝E×F とできるわけだし、ほらよく考えれば分かるはずだよ」
(太郎君、しばらく考えて)
太郎「そうか、2×3＝6 だ」
父「そう、G が 6 で E、F が 2 と 3 だ。0 から 6 までの数で、この掛け算の式が成り立つのはこれしかないな。勿論 E、F は逆でも良い。さあ、最後に②を考えよう。B が 0、C が 1 で E、F、G が 2、3、6 だから残るは A と D だけど 4 と 5 だ」
太郎「分かった！D が 5 で A が 4 だ。答は 5 だ」
父「正解。一見難しそうだけど、落ち着いて考えればそれほど難しくない問題だ」
太郎「うん、そうだね。順を追って考えればそんなに難しくないね」
父「ああ、でもまあなかなか良い問題だ」
二人は得意そうにうなずき合い、やがて止まった次の駅で降りて行ったのでした。

さて、この二人のやり取りは果たして本当に正しいでしょうか。答だけを要求される穴埋め問題ならば確かに「D＝5」で○をもらえるでしょう。しかし、二人の会話の中には重大な誤りがあります。それが何か分かりますか？すぐにピンとこなかった人はもう一度問題と二人の会話を読み返してみて下さい。

それでは解説しましょう。③の式から「C＝1」としたのが間違いです。

B×C＝B ⇒ C＝1

このとき何をしたかと言うと、「両辺を B で割った」のです。もし B が 0 だったらどうでしょう。ある数を 0 で割るというとんでもないことをしでかしたことになります。現にこの問題では①から B は 0 です。特に重要なので繰り返しますが、

『割り算をするときには、割る数（文字）が 0 でないか十分注意しなければならない』

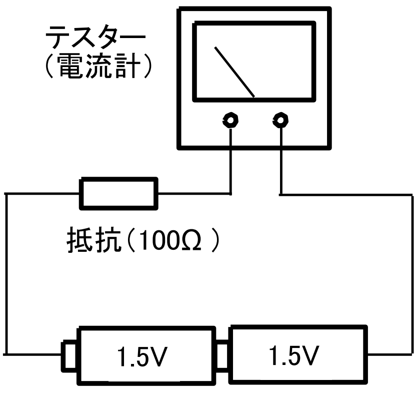
さて、電車の中での問題に戻ってもう少し検討を加えてみましょう。

B×C＝B ・・・ ③

は結局、0×C＝0 ですから C は 1 である必要はなく、どんな数でもかまわないということになります。実際、父と子は C＝1 と思い込んでいましたが、実は C＝4 で A＝1 という答もありうるのです。③はこの問題において全く無意味な式ということになるのであって、この問題は、①、②、④だけにしても、本質は少しも変わることはありません。

余談になりますが、それでは出題者は何故③を付け加えたのでしょう。わざわざ付け足したのは、何らかの意図があってのことと思われますが、もし③から C＝1 とやってしまう間違いをチェックしたかったのなら、答に C の値が関係してくるような問題の出し方でもよかったのではないでしょうか。たとえば「C＞A のとき C の値は？」という聞き方で。

さらに余計なことを言えば、④は単独の式でこれに当てはまる 2、3、6 が外れるだけです。残りの 0、1、4、5 で①、②、③を成り立たせる A、B、C、D を考えることになりますが、③が無意味なものですから、結局①、②から求めることになります。①から B＝0 で、②は D＝A＋C ですから、5＝1＋4 より、A と C は 1 か 4 で D は 5 になります。



今度は筆者が実際に体験した話です。私は小学生の頃から電気工作に興味を持ち、よくゲルマニウムやトランジスタのラジオを組み立てたものですが、あるとき小遣いを貯めて、念願のテスターを手に入れました。テスターというのは、電気回路における電圧や電流、そして抵抗の値などを測る測定器です。電気回路の最も基本的な法則で、皆さんも耳にしたことがあると思いますが「オームの法則」というのがあります。図のような回路において、電源の電圧 V と抵抗値 R そしてこの回路に流れる電流 I の間に

I＝V/R

の関係が成り立つというものです。3V の電源に 100Ω の抵抗をつなぎ、テスターを電流用に合わせて計測すると、3/100＝0．03A（アンペア）すなわち 30mA の電流が流れるのを確認できるといった具合です。抵抗値をいろいろ変えているうちに、ふと、抵抗を何もつながなかったらどうなるのだろうと考えました。式では、I＝3/0 となりますが、I の値がどうなるのか、どう考えても分かりませんでした。3＝I×0 と書き換えると、ますます分からなくなりました。悩んだ末に、ついに間違いを犯してしまい（二本のテスト棒を電池の＋、－に直に触れさせてしまった、つまり抵抗値≒0 状態！）、やっとの思いで手に入れたテスターをそ

の日のうちに壊してしまうという悲劇を味わいました。当時の安物のテスターには、こうした間違いに対処する保護機能が無かったのです。代償は大きかったですが、おかげで数学の問題を解くときにはいつも意識するようになりました。

続いて、数式の式変形でやはり間違い易い例を示します。0 で割ってはいけないという掟を繰り返し確認してきたので、もうひっかかることは無いと思いますがどうでしょう。

問題］$\sqrt{2}/2=-\sqrt{2}/2$ が成り立つことを示す。
証明］
　$x=\sqrt{2}/2$ ・・・ ①
　とおく。両辺 2 倍して、
　$2x=\sqrt{2}$ ・・・ ②
　①、②の辺々を掛け合せると
　$2x^2=1$
　となります。両辺から$\sqrt{2}x$ を引いて
　$2x^2-\sqrt{2}x=1-\sqrt{2}x$
　$\sqrt{2}x(\sqrt{2}x-1)=-(\sqrt{2}x-1)$ ・・・（＊）
　$\sqrt{2}x=-1$
　よって、$x=-\sqrt{2}/2$ となるから、①と合わせて、
　$\sqrt{2}/2=-\sqrt{2}/2$
　が成り立つ。証明終り。

証明の中のどこに過ちがあるか。両辺を割り算しているのは一箇所だけですし、0 で割るなという話をしているところですからすぐに気が付いたと思います。（＊）の式の両辺を、$\sqrt{2}x-1$ で割ったところが間違いです。もともと $x=\sqrt{2}/2$ ですから、$\sqrt{2}x-1$ は 0 になります。0 で割るとこのような矛盾したことが起きるという例です。
　ここでの本題からはそれますが、0 で割るという掟破りをしたにしても、どうして $x=-\sqrt{2}/2$ などという値がでてきたのでしょう。実は、これも極めて重要なことがらで、このことに関しては§20 で解説します。

さて、次に簡単な方程式を解いてみましょう。ただし、基本的なことがしっかりおさえられていないと、完璧に解くのは難しいかもしれません。

問題］ 次の方程式を解きなさい。
$$ax+b=0$$
解］
　$ax=-b$ ・・・ ①
　1）$a\neq 0$ のとき
　　$x=-b/a$
　2）$a=0$ のとき

①→ $0\cdot x=-b$
従って、
ⅰ）$b=0$ のとき、x は任意の数
ⅱ）$b\neq 0$ のとき、x は解なし
以上、まとめると、
$a\neq 0$ のとき、$x=-b/a$
$a=0$、$b=0$ のとき、x は任意の数
$a=0$、$b\neq 0$ のとき、解なし

2）のⅰ）では、①の式が、$0\cdot x=0$ となるので、x がどんな数でも、$0=0$ で成り立ちます。すなわち、解が無数に存在することになります。2）のⅱ）では、x にどのような数を入れても、左辺は 0 となるので、0 でない右辺と等しくなることはありません。従って「解なし」です。
等式や不等式を変形する際、文字や文字を含んだ式で両辺を割る場合には、その文字や式が、もしも 0 になる可能性があるならば、今のように場合分けが必要になります。

最後に、高校生向きの問題になりますが、今までの話のまとめとして紹介しましょう。それほど難しい問題ではないので、中学生でも分かると思います。

問題〕 次の等式が成り立つとき、この式の値を求めよ。
$(y+z)/x=(z+x)/y=(x+y)/z$
解〕
（高校生なら経験していると思いますが、このような場合には、式の値を k とおくのが定石です。また、問題文には断り書きがないですが、x、y、z は最初から分母の数になっているので 0 ではないと考えてよいです）
$(y+z)/x=(z+x)/y=(x+y)/z=k$ ・・・ ①
とおく。（すると、この等式は次のように、三つの式に分けられます。）
$y+z=kx$
$z+x=ky$
$x+y=kz$
この三つの式を辺々加えて、
$2(x+y+z)=k(x+y+z)$
（求めるのは k の値ですが、ここで直ちに $k=2$ としてはいけない、というのが今までやってきた話です）
1）$x+y+z\neq 0$ のとき、$k=2$
2）$x+y+z=0$ のとき、
$y+z=-x$
①の一番左の辺に代入して、$k=-1$
1）、2）より、求める式の値は、2 と -1