## §19. 複素平面上の宝探し(虚数の世界を探る)

二次方程式の解の公式を用いて、次の方程式を解いてみましょう。

$x^2-x+1=0$

$x=(1\pm\sqrt{1-4})/2$

$=(1\pm\sqrt{-3})/2$

$\sqrt{\ }$の中がマイナスになります。中学の数学ではこのような問題は相手にしませんでした。出題する側はこのように$\sqrt{\ }$の中がマイナスになるような問題は避けていたのです。

高校の数学では、上のような方程式にも意味のある解を持たせるために、次のような新たな数を約束(定義)します。

**$x^2=-1$ を成り立たせる x を±i とする。すなわち、$i=\sqrt{-1}$。**

これから、$i^2=-1$、$(-i)^2=-1$ です。今までは有りえなかった二乗してマイナスになる数の登場です。このような数を「虚数」と言います(英語で虚数は「imaginary number」、実数は「real number」)。**i は虚数単位**です。

また、a、b を実数としたとき、

**a+bi**

で表される数を**複素数**という言い方をします。b=0 のとき、a+bi=a ですから実数になります。つまり、複素数は実数(i を含まない数)も虚数(i を含む数)もすべてを表す数です。

数の世界は自然数に始まり、整数、分数(有理数)、実数(無理数)と広がって複素数にまで拡張されました。もうこれ以上広がることはありません。

さて、上の方程式の解はこの i を用いると、

$\sqrt{-3}=\sqrt{3\times(-1)}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=\sqrt{3}i$　　　　注)一般に $a>0$ のとき、$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

なので、

$x=(1\pm\sqrt{3}i)/2$

となります。このように、i の導入によって二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ … ① はどのような係数 a、b、c に対しても解を持つことになります。

簡単に分かることなので、次のことも確認しておきましょう。二次方程式①の解の公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ですが、$\sqrt{\ }$の中の $b^2-4ac$ がマイナスのときは x が i を含む数になるので虚数になります。$\sqrt{\ }$の中がプラスなら勿論実数です。ついでに$\sqrt{\ }$の中が 0 なら、x は $-b/2a$(一個だけ)になります。

つまり、二次方程式①の解は、

$b^2-4ac>0$ のとき実数の解(二個の実数解)　(ⅰ)

$b^2-4ac=0$ のとき一個の実数の解(重解という)(ⅱ)

$b^2-4ac<0$ のとき虚数の解(二個の虚数解)　(ⅲ)

というようになります。このように $b^2-4ac$ の値が正か 0 か負かで二次方程式の解が(方

程式を解かなくても）どのような数になるかを判別することが出来ます。それで、普通この式をＤで表し判別式と言います。

**二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$**

上の（ⅰ）$D>0$ の場合と（ⅱ）$D=0$ の場合を合わせて、単に $D\geqq 0$ のときは実数解ということがあります。また容易に分かるように、（ⅰ）、（ⅱ）、（ⅲ）はそれぞれ逆も言えます。つまり、判別式Ｄの値と解の間の関係はそれぞれ互いに必要十分条件（§19）の関係になっています（解が実数解⇔$D\geqq 0$、虚数解⇔$D<0$ と言ったように）。

虚数単位の i を含んだ式の演算は、普通の文字式の演算と同様に行い、$i^2$ が出来たら $-1$ にします。分数の分母に i が含まれる場合は、分母の有理化のときと同じ手法で（$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を活用し、二乗することで√をなくした）、分母の i をなくします。いずれにしても、複素数は

$a+bi$（a、b は実数）

の形で表すのが基本で、演算した結果もこの形を目指します。例を示します。

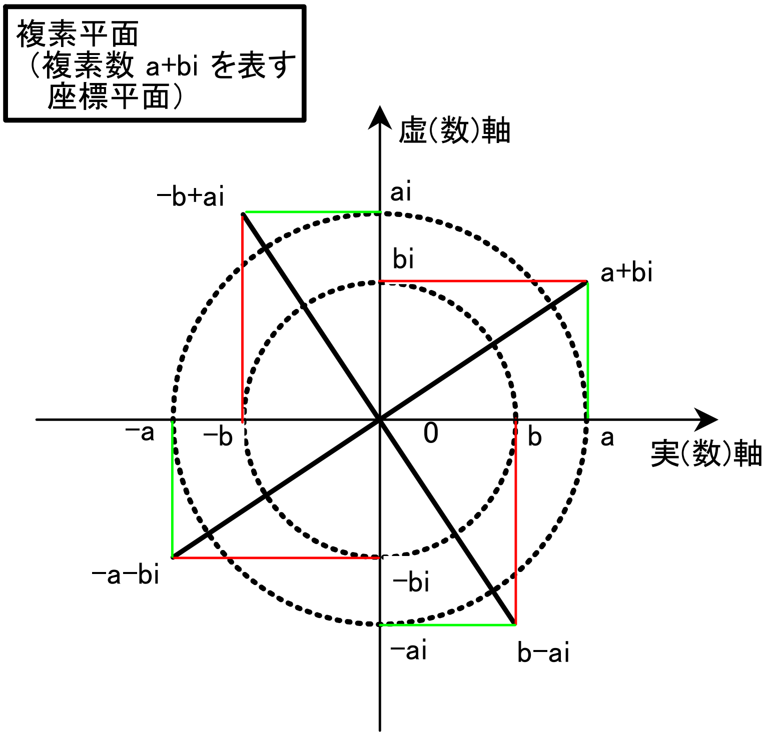
$(3+2i)(1-2i)$
$=3-6i+2i-4i^2$
$=3-4i-4(-1)$
$=7-4i$

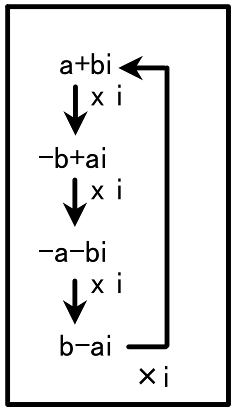
$(2p+3qi)/(p+2qi)$
$=(2p+3qi)(p-2qi)/(p+2qi)(p-2qi)$　　（分母・分子に $p-2qi$ を掛けた）
$=(2p^2-4pqi+3pqi-6q^2i^2)/(p^2-4q^2i^2)$
$=(2p^2+6q^2-pqi)/(p^2+4q^2)$ ・・・（分母の i が消えた）
$=(2p^2+6q^2)/(p^2+4q^2)-(pq/(p^2+4q^2))i$ ・・・（$a+bi$ の形）

実数は数直線（一次元）を用いて点の位置として表すことが出来ました。複素数を視覚的に表すためには、例えば $a+bi$ は a、b 二つの要素があるので平面（二次元）を用いる必要があります。そこで用いられるのが、複素平面と呼ばれる座標平面です。横軸が実数軸で縦軸が虚数軸です。実数軸上の単位 1 と虚数軸上の虚数単位 i は原点 O から同じ距離に取るのが習慣です。この複素平面は、複素数 $a+bi$ を、実数軸上の点 a における垂線と虚数軸上の点 bi における垂線の交点に対応させます（通常用いる xy 座標平面と同様）。このことによって、任意の複素数が平面上の点と 1:1 に対応します。

この複素平面には次のような特徴があります。任意の複素数 $a+bi$ に対して i を掛けると $-b+ai$ になりますが、この複素数 $-b+ai$ の点は元の複素数 $a+bi$ の点を、原点中心に時計の針と反対方向（左回り）に 90°回転した点になっています。もう一度 i を掛けるとさらに 90°回転するので、原点に関して対称な点になります。一方 i を二回掛けるということは、$\times i^2$ ですから、$\times(-1)$であり、$a+bi$ は $-a-bi$ になって、確かに原点に関して対称になります。さらに i を掛けると、270°回転したことになりますが、これは原点中心に時計の針の方向（右回り）に 90°回転したことと同じになります。一方、$\times i^3$ は$\times(-i)$ に相当するので、右回りに 90°回転する場合は $-i$ を掛ければ良いことになります。最後にもう一度 i を掛けると、360°回転したことになるので元の点に戻りますが、$\times i^4$ は $i^4=1$ なので確かにその

ようになります。




さて準備の話が長々と続いてしまいましたが、いよいよ本題に入ります。

「まえがき」にも書きましたが、問題は次のようなものです。ここでも味気の無い題意のみが伝わる文章で紹介します。

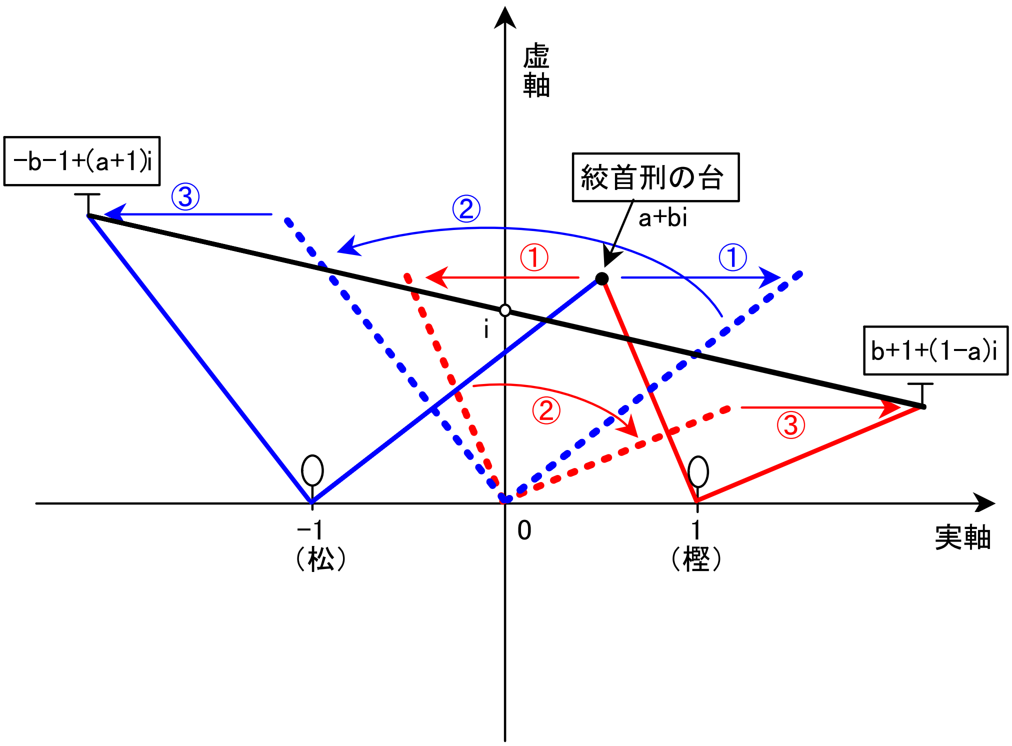
『宝のありかを記した次のようなメモを手に入れた。

「無人島のどこかに絞首刑の台があり、さらに樫の木と松の木がある。まず絞首刑の台の位置から歩数を数えながら樫の木に向かって歩き、樫の木まで行ったら右へ 90°向きを変え、同じ歩数歩いて杭を打つ。再度絞首刑の台から今度は松の木に向かって歩数を数えながら歩き、松の木まで行ったら左へ 90°向きを変え、同じ歩数歩いて杭を打つ。宝はこの二本の杭のちょうど中間に埋まっている」

ところが実際にその無人島へ行ってみると、樫の木と松の木はあったが、絞首刑の台が朽ち果てたのか跡形もなく消えていた。宝の位置をどうやって探し当てるか』

という問題です。勿論初等的な幾何学を使っても解けるのでしょうが、90°回転というところを複素平面を用いればスマートに解決しそうです。

図形の問題に対して座標平面を活用する場合は、一般性を損ねないようにしつつ式変形や計算がし易いように工夫するものですが、ここでは無人島に対して次のように複素平面を取り入れることにします。樫の木と松の木を通る直線を実数軸、二本の木の中点を通る実数軸に垂直な直線を虚数軸とします。計算し易いように、樫の木の位置を 1、松の木の位置を－1 とします。そして絞首刑の台の位置を、一般性を損ねないように a＋bi としま




す。90°の回転は原点中心ではなくそれぞれの木中心なので、少し工夫が必要です。絞首刑の台と樫の木とを結ぶ線分を実数軸に平行に左へ(マイナス方向へ)1だけ平行移動します。つまり樫の木が原点に来るようにします。すると絞首刑の位置に対応する複素数は a－1＋bi になります。この点を右回りに 90°回転するには－i を掛ければ良いので、

(a－1＋bi)(－i)＝b＋(1－a)i

この点を実数軸に平行に右に 1 平行移動して元に戻すと、

b＋1＋(1－a)i ･･･ (1)

になります。この点が問題文にある一本目の杭の位置です。

同様に絞首刑の台と松の木とを結ぶ線分を右へ 1 だけ平行移動して、松の木が原点に来るようにします。すると絞首刑の台の位置は a＋1＋bi という複素数になります。これを左回りに 90°回転させるには i を掛けて、

(a＋1＋bi)i＝－b＋(a＋1)i

この点を左に平行移動して元に戻すと、

－1－b＋(a＋1)i ･･･ (2)

となり、二本目の杭の位置が求まります。

宝は(1)と(2)の中点に埋まっているので、(1)、(2)の式を足して 2 で割ると、

{(b＋1＋(1－a)i)＋(－1－b＋(a＋1)i)}/2

＝i

になります。a、b が消えて、虚数軸上の点 i になります。つまり絞首刑の台がどこにあろうと(a、b がどんな値であろうと)、宝が埋められている場所はこの点に決まるのです。

さて、最後に数学の世界でよく知られたある等式に関する話題を一つ提供します。ここに登場した虚数単位の i と、§26 のネイピア数の e と円周率の π の間に、とても不可思議で美しい等式が成り立ちます。

$e^{i\pi} = -1$

これはオイラーという数学者（§7 に登場）が見出した等式で、考えれば考えるほど魅せられるべきものと言えるでしょう。実数単位の 1 と虚数単位の i とそれぞれが全く独立に見出された円周率の π とネイピア数の e との間にこのような関係が成り立つとは！

どうして成り立つのかを理解をするには、大学で習う数学が必要ですが（無理すれば高校生にも分かる）、簡単で覚えやすいので記憶に留めておくと良いでしょう。