§18. その地点はかなり危うし（二次曲線・楕円）

楕円というのは日常の中にも登場するおなじみの図形と言えるでしょう。円を一定の方向に拡大あるいは縮小して出来る図形ですが、茶碗やコップを少し斜めから見れば楕円に見えます。そのものを形として見たければ円柱状のネギやソーセージを斜めに切った切り口で見られますし、懐中電灯の光（円すい状）を床や天井に少し斜めに当てた時にも出来ます。太陽の周りを回る惑星や何年かの周期で出現するすい星が楕円軌道を描いていること、そしてその軌道の中心となる位置（これを焦点と言う）に太陽があるということを理科でならったことがあるでしょう。

ここでは本来の楕円の定義からその方程式がどのように導かれるのか、また焦点の意味や性質について数学的に見ていこうと思います。非常に興味深い内容が明らかになります。ただし、余りに式変形が厄介なところや高校の理系で学ぶ内容でしかも説明するとなるとかなりの時間とスペースを要するようなところは、結論のみを使う個所があります。そのようなところに関しては、今は知らなくても先へ行って理解が出来たときに「これがあれだったんだ」と感動したりするものです（私も経験しましたが・・・）。もしも途中でうんざりして読むのが辛くなったら、最後に出てくる『光線銃による決闘』の話だけでも覚えておくとよいでしょう。

まず楕円の定義からです。

『定直線とその直線外の定点があって、定直線への距離と定点への距離の比が一定であるような点で、その比が１より大きいとき、その点の軌跡を楕円という』・・・ ①

注）定直線への距離と定点への距離が１の（等しい）場合は放物線
１より小さい場合は双曲線

楕円、放物線、双曲線を二次曲線と言う。またこれらは円錐を平面で切った切り口として表れることから円錐曲線ともいう（§17）。

記号をまじえて分かり易く表現すると次のようになります（次ページの図）。

定直線を L_1、定点を F_1、条件を満たす点を P とします。また点 P から直線 L_1 へ引いた垂線の足を H_1 とし $PH_1 = m$、$PF_1 = n$ とすると、今の楕円の定義は次のように表すことが出来ます。

$PH_1 : PF_1 = m : n$ （$m > n$） ・・・ ① （注：m/n を e で表し、e＞1 とすることもある）

今の楕円の定義は図のように左右対称で、定直線および定点は反対側にも考えられます。反対側の定直線を L_2、垂線の足を H_2、定点を F_2 とします。ただし、L_2、H_2、F_2 は今から説明することのために必要なのであって、定義そのものには登場しません。

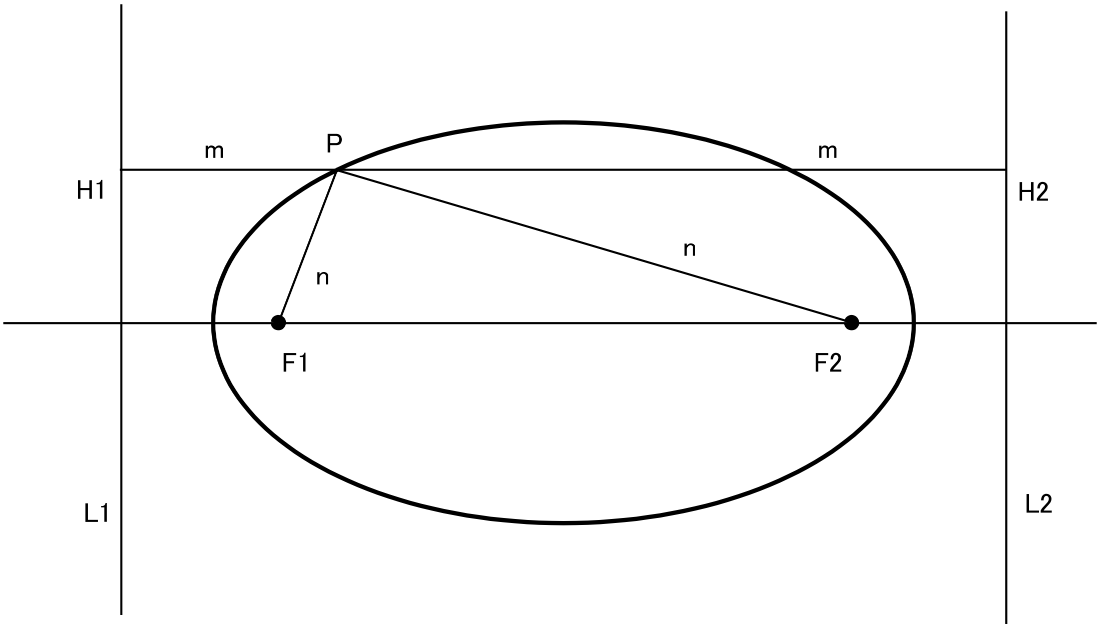
$PH_1 : PF_1 = m : n$、$PH_2 : PF_2 = m : n$ より、

$PF_1 = (n/m)PH_1$、$PF_2 = (n/m)PH_2$

$PF_1 + PF_2 = (n/m)(PH_1 + PH_2)$

L_1L_2 間の距離は一定（上にも書いたように図は左右対称）なので、PF_1+PF_2 は一定になります。つまり、最初に示したような定義のもとに作図すると、楕円上の点 P は二つの定点 F_1、F_2 に対して

PF_1+PF_2 ：一定 ・・・ ③



になります。楕円の定義を③のように示すこともあります。というよりこちらの方が直感的に分かり易いですし作図も楽しくできるので良く紹介されます。すぐに分かるように画面上に二本のピン(F_1、F_2)を打ち、この二点間の距離より少し長めのひもを両方のピンに結びます。鉛筆の先(P)をひもにかけ、ひもが常にピンと張った状態を保つようにしながら(途中ピンが邪魔しますがそこはうまくさけて)一周すると楕円が描けます。ひもが長めならふっくらした楕円が、短めならやせた楕円になります。また、もしも F_1 と F_2 が一致した点ならば円になります。つまり円は楕円の特殊な状態とも考えられます。

それでは座標軸を取り入れて、楕円の方程式を求めてみます。

F_1、F_2 を通る直線を x 軸、線分 F_1F_2 の垂直二等分線を y 軸にします。そして F_1、F_2 の座標を、$(-c, 0)$、$(c, 0)$ (ただし $c>0$)、点 P の座標を(x, y) とします。さらに、$PF_1+PF_2=2a$ (ただし $a>0$)とします。この 2a は上の作図でのひもの長さです。したがって、$2a>2c$ であり、$a>c$ です。③より

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

両辺が正であることを確認して(同値性が崩れないように→§20)両辺を二乗します。

$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$

$a>c$ 、$a>x>-a$ であることから、$a^2-cx>0$ 。従って両辺が正であることが確認できるので、両辺二乗して、

$a^2\{(x-c)^2+y^2\}=a^4-2a^2cx+c^2x^2$

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$a^2-c^2=b^2$ (ただし、$b>0$) とおいて、両辺 a^2b^2 で割って

$\mathbf{x^2/a^2+y^2/b^2=1}$ **・・・** (A)

非常に簡単で美しい楕円の方程式が得られました。ひもの長さが 2a であることから、x

軸との交点が a と−a です(勿論、$y=0$ からも得られる)。また点 P が y 軸上にある場合を考えると分かりますが、$a^2-c^2=b^2$ としたことから、ピタゴラスの定理によって y 軸との交点は b と−b です(同じく $x=0$ から得られる)。

$a=b$ のときは $c=0$ で F_1、F_2 は原点に一致し円になりますが、(A)の方程式も

$x^2+y^2=a^2$ というように半径 a の円の方程式になります。

次に、楕円の接線を考えます。最後に分かりますが、焦点の性質を探るためです。

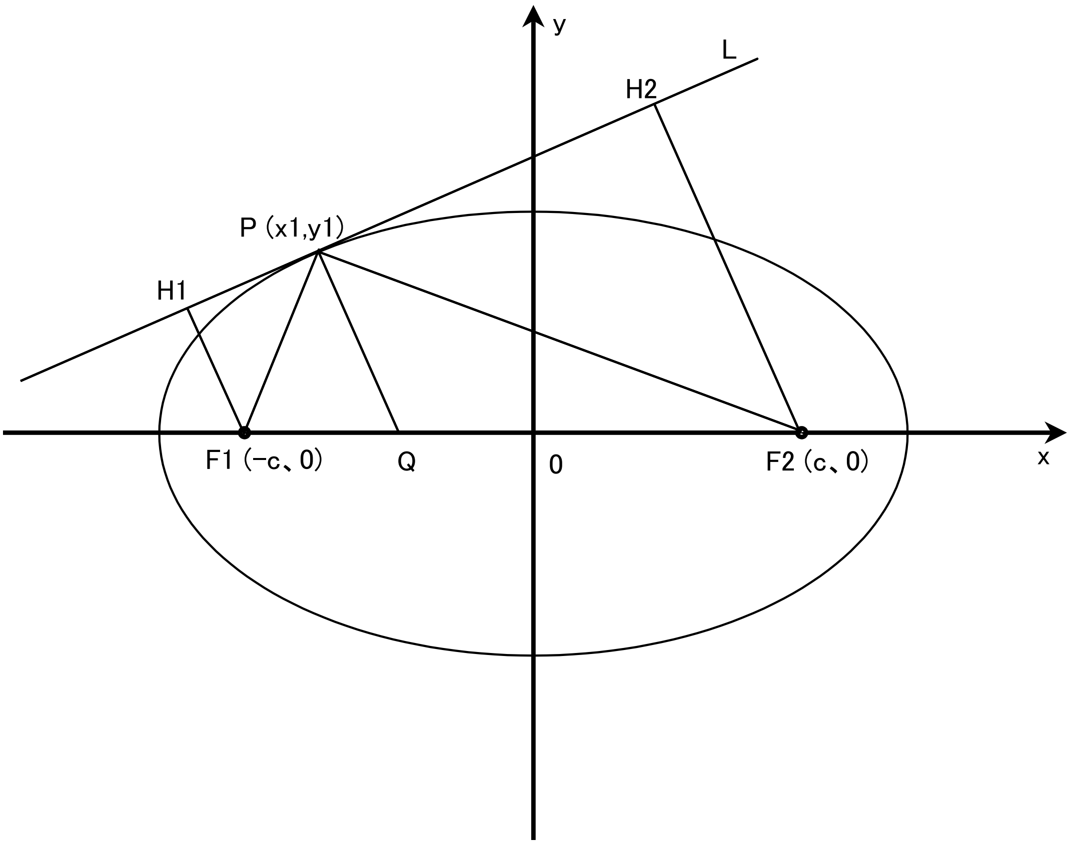
円の接線は、接点と中心を結んだ半径の線分に垂直であることから、簡単に求められますが、これから求める楕円の接線と関連付けるために紹介します。中心が原点で半径 r の円

$x^2+y^2=r^2$ ・・・ (B)

の点$(x_1、y_1)$ における接線の方程式は

$x_1x+y_1y=r^2$ ・・・ (B')

すなわち、x^2、y^2 のそれぞれ一つを x_1、y_1 に置き換えるのです。これで正しい訳は、(B')の x に x_1、y に y_1 を代入すると、(B)が成り立つことから、点(x_1、y_1)は円(B)上の点であり、直線(B)の傾き $-x_1/y_1$ がその点と中心を結んだ線分の傾きに垂直であることから分かります。



今度は楕円(A)上の点(x_1、y_1)における接線ですが、方程式は次のようになります。

$x_1x/a^2+y_1y/b^2=1$

注）(A)の両辺を x で微分すると（この微分計算は高校の理系）、

$2x/a^2+2yy'/b^2=0$

となり、$y'=-b^2x/a^2y$ これから接線の傾きは $-b^2x_1/a^2y_1$

従って接線の方程式は

$y-y_1=-b^2x_1/a^2y_1(x-x_1)$

$x_1x/a^2+y_1y/b^2=x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1$ （∵ 点$(x_1、y_1)$は(A)上の点）

これから、

$x_1x/a^2+y_1y/b^2-1=0$ ・・・（C）

一般に、点$(x_0、y_0)$から直線 $ax+by+c=0$ への距離が

$|ax_0+by_0+c|/\sqrt{(a^2+b^2)}$ であることを使って

注）これも高校で習う

点 $F_1(-c、0)$から直線（C）への距離 F_1H_1 は

$F_1H_1=|-cx_1/a^2-1|/\sqrt{\{(x_1/a^2)^2+(y_1/b^2)^2\}}$

同様に、点 $F_2(c、0)$から直線（C）への距離 F_2H_2 は

$F_2H_2=|cx_1/a^2-1|/\sqrt{\{(x_1/a^2)^2+(y_1/b^2)^2\}}$

よって、

$F_1H_1/F_2H_2=|cx_1+a^2|/|cx_1-a^2|$ （分母、分子に a^2 を掛けた）

$=(a^2+cx_1)/(a^2-cx_1)$ ・・・（D）（$a>c、a>x_1>-a$ より）

注）一般に、$|-a|=|a|$ であるから、

$|-cx_1-a^2|=|cx_1+a^2|$

次に、点$(x_1、y_1)$を通って接線に垂直な直線（法線という）は、傾きが

a^2y_1/b^2x_1

であることから、

$y-y_1=(a^2y_1/b^2x_1)(x-x1)$

$y=0$ として x 軸との交点 Q の x 座標を求めると、

$-b^2x_1=a^2x-a^2x_1$

$a^2x=(a^2-b^2)x_1=c^2x_1$ （$∵a^2-b^2=c^2$）

$∴ x=(c^2/a^2)x_1$

$Q((c^2/a^2)x_1、0)$

これから、

$F_1Q=(c^2/a^2)x_1-(-c)$

$=c(cx_1+a^2)/a^2$

$F_2Q=c-(c^2/a^2)x_1$

$=c(a^2-cx_1)/a^2$

よって、

$F_1Q/F_2Q=(a^2+cx_1)/(a^2-cx_1)$ ・・・（E）

(D)と(E)より、

$F_1H_1/F_2H_2=F_1Q/F_2Q$

$=PH_1/PH_2$

従って、$\triangle PH_1F_1 \backsim \triangle PH_2F_2$ であるから、$\angle F_1PH_1 = F_2PH_2$ となり、F_1 から出た光線はPで反射して F_2 に到達することが分かります。勿論その逆も言えます。F_1、F_2 は楕円の焦点と言いますが、

『楕円においては、片方焦点から出た光線はどの方向に向かっても反射してもう一方の焦点に向かう』

のです。

二人の人間が光線銃を持ち F_1、F_2 に立って決闘したとします。ただし、光線に当たっても「痛っ！」くらいだとします。しかもありえない話ですが、この銃が放つ光線は光の性質（反射に関する）は保ちつつも、光の速さほどのスピードでない（上手くすればよけられる）とします。さて決闘ですが、相手を狙わなくても必ず相手に命中します。しかもどこに反射しても相手に届く時間は同じです（勿論直で当たった方が早いですが・・・）。とにかくいかに早く引き金を引くかです。ただし、気を付けねばなりません。相手がもしもうまい具合によけたら、自分が放った光線は相手が立つ焦点から発した光線になるので、間違いなく自分に向ってきます。