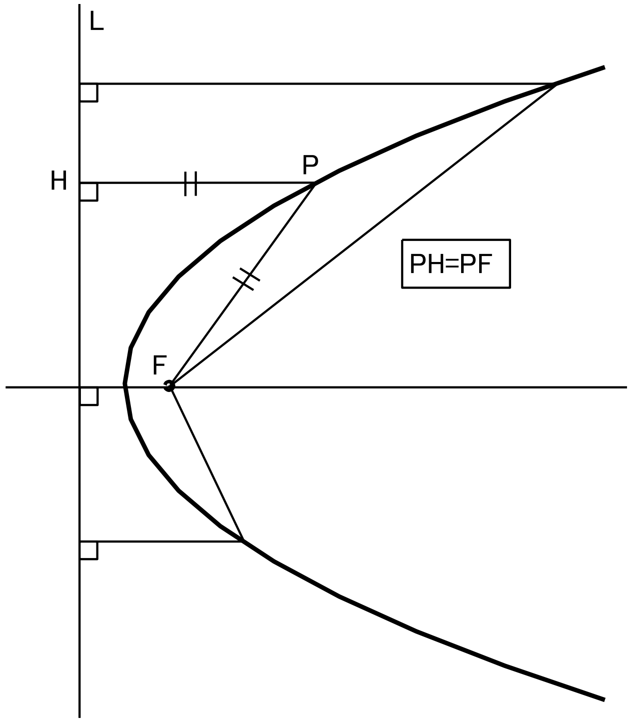
§18. 忍者も知っていた？通信手段（二次曲線・放物線）

野球でバッターが打ったホームランを『美しい放物線の軌道を描いてスタンドに入りました』というようにアナウンスされるのを聞くことがあります。放り投げた物が、投げた時の力や角度そしてその物に掛かる重力の関係（ただし空気の抵抗などは無視して）によって描く軌道を放物線と言います。我々は二人でキャッチボールをするとき、いちいち力や角度や距離などで計算することなく、経験的に頭の中に放物線軌道を描いて相手に向かって投げます。考えてみれば、かなりすごいことをやっているわけです。

さて、この放物線ですが、意外にも上の話とはなかなか結び付きそうにない、次のような定義のされ方をするのが数学的には一般的です。

『定直線とその直線外の定点があって、定直線への距離と定点への距離が等しいような点の軌跡を放物線という』・・・ ①



記号をまじえて分かり易く表現すると次のようになります。

定直線をL、定点をF、条件を満たす点をPとします。また点Pから直線Lへ引いた垂線の足をHとすると、今の放物線の定義は次のように簡単に表すことが出来ます。

PH＝PF ・・・ ②

ところで、PH＞PF の場合は§18の楕円になります。PH＜PF の場合に何になるかは、この章の最後に簡単に触れます。

上のように定義された放物線（点Pの軌跡）を作図すると図のようになります。言うまでもなく、これは中学で習う二次関数のグラフですが、まずそのことを確認しましょう。中学で習う二次関数のグラフは左右対称（つまり対称となる軸が y 軸あるいは y 軸に平行）になるように描くのが習慣なので、ここでもそれに合わせて上の図を左回りに90°回転させることにします。

定直線Lに垂直で定点Fを通る直線をy軸とし、y軸とLとの交点をF’とします。そしてy軸に垂直でFF’の中点を通る直線をx軸とします。さらに点Fの座標を（0、f）、点Pの座標を（x_1、y_1）とします。PF＝PHより

$$\sqrt{\{x_1^2+(y_1-f)^2\}}=y_1-(-f)$$
$$=y_1+f$$

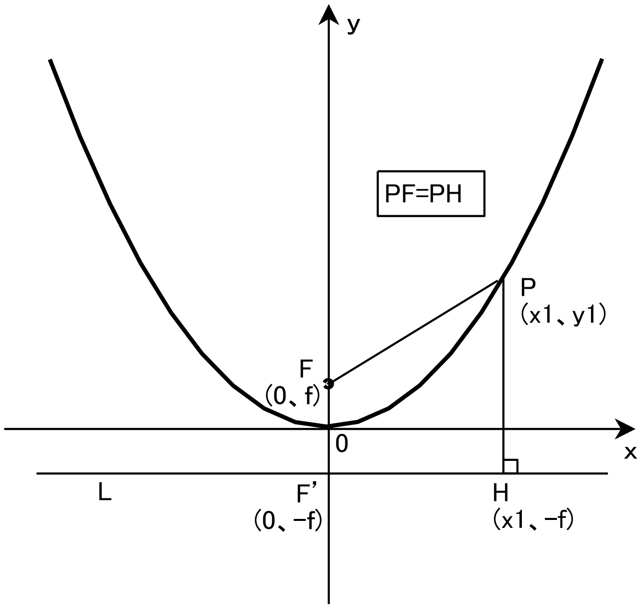
この両辺を二乗すると、

$x_1^2+y_1^2-2fy_1+f^2$
$=y_1^2+2fy_1+f^2$
$x_1^2=4fy_1$

即ち、点 $P(x_1、y_1)$ は、

$y=(1/4f)x^2$ ・・・ ③

という二次関数上の点です。つまり放物線は中学で習う二次関数で表されるということになります。



次に点 $P(x_1、y_1)$ における接線の方程式を考えます。傾きの求め方は§23 の微分で説明していますが、ここではそれを用いることにします。傾きは

$(1/4f)\cdot 2x_1$
$=(1/2f)x_1$

なので、

$y-y_1=(1/2f)x_1(x-x_1)$
$y=(1/2f)x_1x-(1/2f)x_1^2+y_1$

となります。ここで、y 軸との交点を求めるには、$x=0$ として、

$y=-(1/2f)x_1^2+y_1$

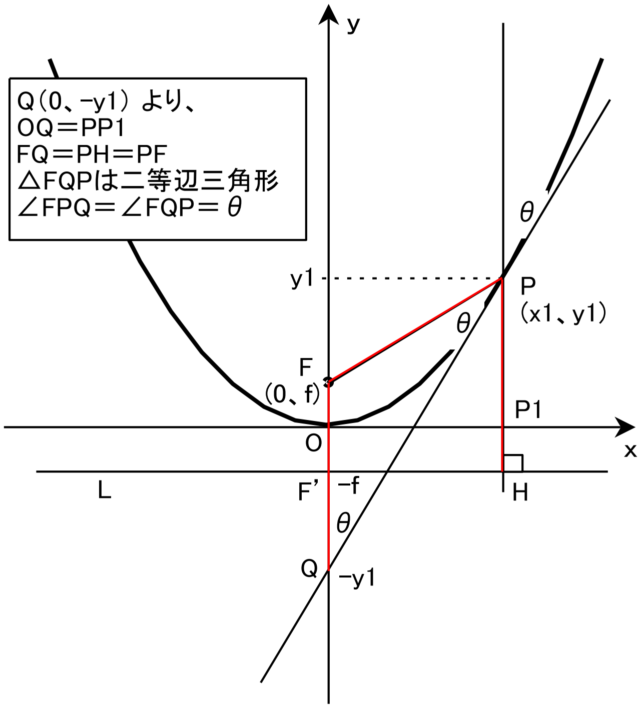
点 $(x_1、y_1)$ は、放物線③上の点なので

$y_1=(1/4f)x_1^2$
$x_1^2=4fy_1$

よって、

$y=-(1/2f)\cdot 4fy_1+y_1$
$=-2y_1+y_1$
$=-y_1$

つまり、接線の y 軸との交点は、元の点 P の y 座標と原点に関して対称な点になります。



PH と x 軸との交点を P_1、接線と y 軸との交点を Q とすると、

$PP_1=OQ$ （O は原点）より、

$FQ=PH=PF$

従って、$\triangle FQP$ は二等辺三角形。

これから、$\angle FPQ = \angle FQP = \theta$

従って、点 P に対して y 軸に平行に入ってきた光線は、点 P で反射して点 F に向かうことが分かります（点　P　における接線に対して入射角と反射角が等しい）。このことは放物線上の任意の点で成り立つので、次のことが言えます。

『放物線においては、軸に平行に入ってきた全ての光線は反射すると点 F に向かう』

こう言った意味で、点 F を放物線の**焦点**と言います。放物線は英語で「パラボラ」ですが、パラボラアンテナという言い方はよく耳にするでしょう。パラボラアンテナは放物線を回転させた形（放物面という）をしていて、受信した電波が全て一点に集まることを利用して、その点に受信装置を設置したものです。言うまでも無く、電波を効率よく受信できるというわけです。同じように、光や熱を反射する材質で放物面鏡を作れば、焦点の位置に効率よく太陽の熱エネルギーを集めることが出来ます。

最後に補足しますが、ここでは放物線が二次関数であることを分かりやすく説明するために、最初に図を90°回転させました。本来は放物線の軸が水平のままで進めるのが一般的です。その場合は放物線の軸が x 軸であって、方程式は、

$y^2 = 4fx$　・・・　④

であり、焦点 F は（f、0）に、直線 L（これを準線という）は $x = -f$　になります。このことを知っていれば、どのような放物線に対しても焦点の位置を簡単に求めることが出来ます。

例えば、二次関数

$y = x^2$

の焦点は次のようにして求めます。

$x^2 = 4 \cdot (1/4)y$

と変形出来るので、④と比べて、f　に相当するのは　1/4、従って、点（0、1/4）　が焦点です。

さて、今までは外部から軸に平行に光線が入ってくる話でしたが、逆に考えたらどうでしょう。焦点の位置に光源（光を発する装置）を設置して放物面に向けて光を放ちます。光線は全て軸に平行に進むはずです。光線は広がりもせず閉じもしないので、効率よく遠くまで届くことになります。忍者が登場する映画で、ロウソクの火を使って合図を送るシーンを見たことはありませんか。忍者はこの原理を活用していたに違いありません（私の勝手な想像です）

最後に、PH と PF との関係で点 P の軌跡がどうのようになるかをまとめます。

ⅰ）PH＞PF　のとき『楕円』

ⅱ）PH＝PF　のとき『放物線』

ⅲ）PH＜PF　のとき『双曲線』

ⅰ）の楕円については次の§18　で取り上げています。ⅲ）の双曲線に関して説明します。ただし、方程式を求めることは省略します。楕円に似た展開になりますが、興味のある人は§18 を読んだ折に挑戦してみてください。

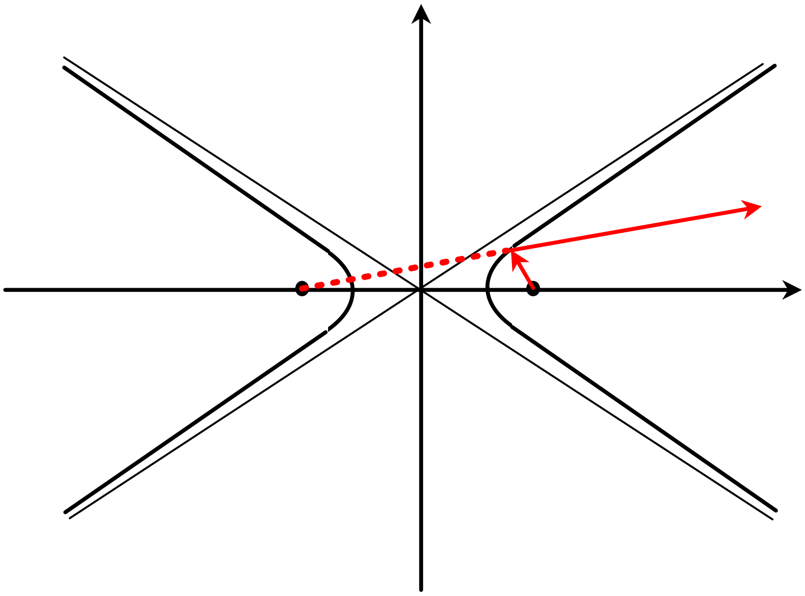
方程式は楕円によく似ていて、次のようになります。

$x^2/a^2-y^2/b^2=1$

焦点は、$c=\sqrt{(a^2+b^2)}$ として、$F_1(-c、0)$、$F_2(c、0)$です。

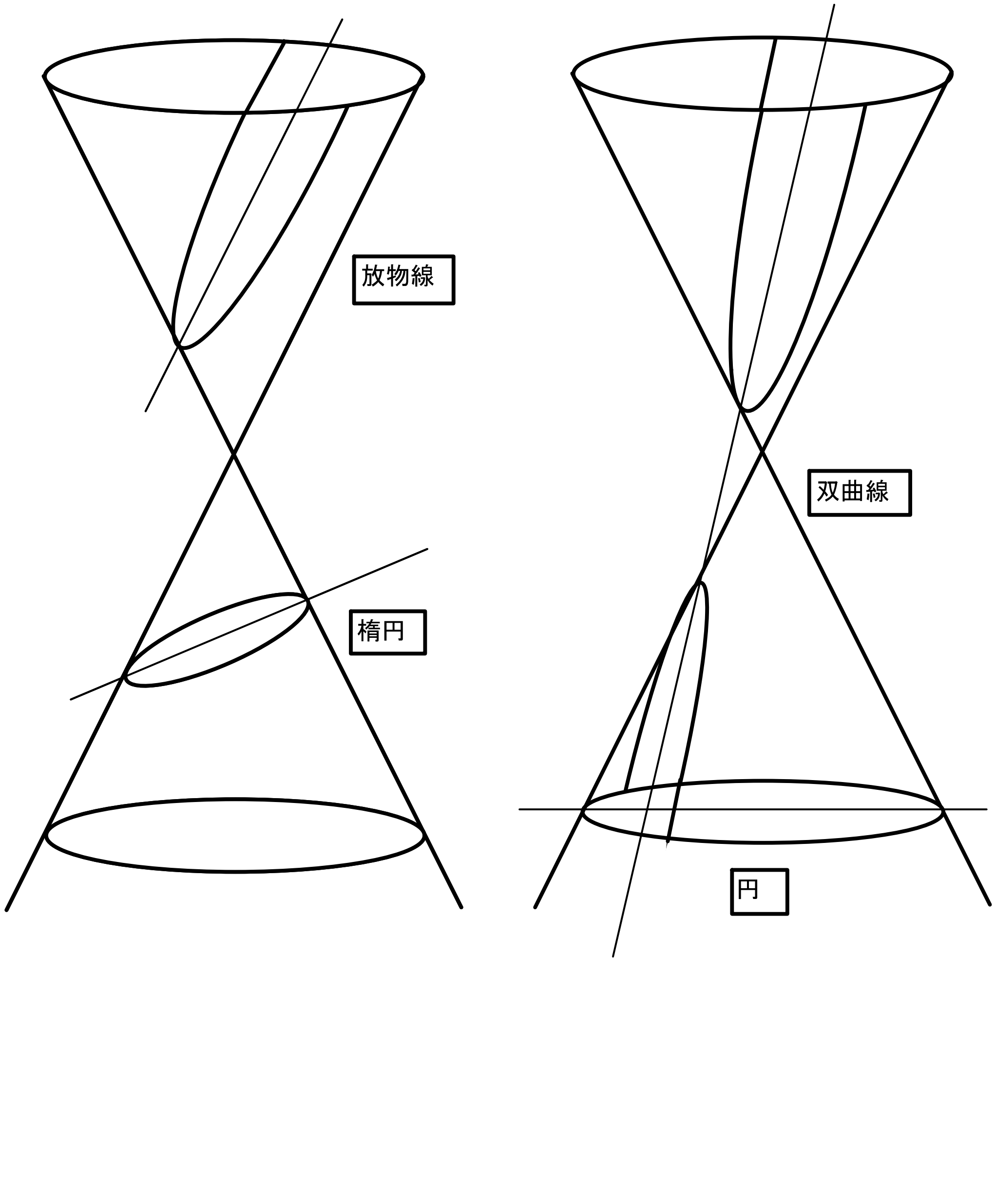
グラフは左右対称に二つ出来、それぞれが二直線 $y=\pm(b/a)x$ に限りなく近づいていきます。この二直線のことを漸近線といいます。

一つの焦点から出た光線は、この曲線に反射すると、あたかももう一つの焦点から発した光線であるかのような方向に進みます。つまり焦点から出た光は反射して少し広がる方向に拡散します。懐中電灯や車のヘッドライトがそのようになっています。



このように、PH と PF の関係によって、点 P の軌跡は放物線、楕円（円はこれに含まれる）、双曲線になりますが、これらを総称して二次曲線という言い方をします。

またこの二次曲線は図のように円すい（双曲線の場合は円すいを二つくっつけて）を切った切り口として現れます。このことから、二次曲線は円すい曲線という言い方もします。


放物線
楕円
双曲線
円