§15. 限りなく大きくなる数（指数関数的増加）

今ではその言い方すら過去のものとなりましたが、この世にサラ金（サラリーマン金融）なるものが出現し始めた当時、信じられないような高利率が法律の許す範囲の内にありました。その具体的な数値を示す前に、一つ例を用意しましたので答えを予想してみてください。

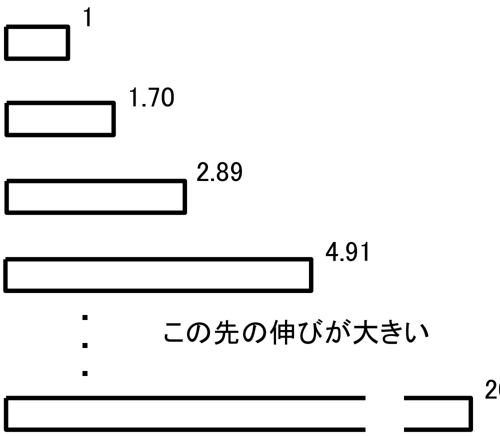
『ある人がある金融会社から 50 万円の借金をしました。さて、この人がその後 10 年間 1 円も返さずに放置したら、借金の総額はいくらぐらいになるでしょう』

簡単に計算ができる人なら、利率を聞かせてくれとおっしゃりたいところでしょうが、ここは一つ利率も含めて予想してみてください。

200 万円、500 万円、それとも 1000 万円？実際はそうした予想をはるかに越えるものになります。それでは、いっしょに計算してみましょう。どのようなものでも結構ですから、電卓をご用意ください（Windows の PC なら『アクセサリ』にあります）。先ほど伏せていた利率は年利 70％です。分かる方はさっさと計算してかまいませんが、そうでない方は考え方と計算法を説明しますので、ぜひともこの信じ難い現実をご自分で確かめてみてください。年利 70％というのは、1 年後には 70％の利息分が増えるということですから、たとえば1万円借りていれば 7000 円の利息が加わって、借金の総額は 17000 円になります。これは、もとの金額 10000 円に 1.7 を掛ければ良いということになります。2 年後には、1 年後と同様 1 年後の総額に 1.7 を掛ければ良いです。つまり、

$$(10000\times1.7)\times1.7=10000\times1.7^2$$

になるので、10000 円に 1.7 を2回掛ければ良いということになります。このことから、10 年後の総額を計算するには、元の借金した額に 1.7 を 10 回掛ければ求められるということになります。



50 万円は置いておいて、1.7 を 10 回掛けてみましょう。電卓では、

1.7$\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

のように、1.7×のあとに、＝を 9 回押すと 1.7 を 10 回掛けた値が求まります。もちろん、1.7 を素直に 10 回掛けてもかまいません。

いくつになりましたか。201.599･･･になったと思います。さて、この値に 50 万円を掛けてみましょう（ただし、8 桁の電卓をお使いの方は、5 万円を掛けてください）。なんと、1 億円を超えるという結論が出ました（5 万円を掛けた人は 1000 万円を超える･･･）。

1.7 と一見小さい値に感じられる数も、10 回掛けると 200 を超えるのです。つまり元の金額の 200 倍になるというわけです。我々は足し算や掛け算の域ならば、日常的に経験していますし、またある程度はその場の暗算も可能ですから、おおまかな見当が付けられます。

ところが、先ほどの借金の総額を求めるのは、累乗（同じ数を何回も掛ける）の計算であって、日常的にはまず現れませんし、簡単に暗算でというわけにもいきません。従って勘も働かず、予想が大きく裏切られることになります。

またもお金の話ですが、今度は借りるのではなく貯める方の話です。ある人が貯金することを思いつき次のような方法をとることにしました。1 日目は 1 円、2 日目はその 2 倍の 2 円、3 日目はそのまた 2 倍の 4 円、4 日目はそのまた 2 倍の 8 円、といった具合です。最初のうちはずいぶんしみったれた話と感じられるかもしれません。しかし、心配は無用です。すぐに大変であることが実感できます。先ほどの流れを続けていくと、さらに日を追うごとに、16 円、32 円、64 円、・・・と増えていきますが、n 日目の貯金すべき金額は 2^{n-1} で表されることが分かります。例えば、10 日目は $2^9=512$ 円、11 日目は $2^{10}=1024$ 円です。まだまだそれほどでもありませんが、21 日目を計算すると、$2^{20}=1{,}048{,}576$ 円になります。まだ何とかなる人もいるでしょうが、はたして一ヶ月後はいくらになるでしょう。31 日目として計算すると、2^{30}ですが、なんと1,073,741,824 円、十億円を突破します。もうよほどの大金持ちで無ければ続けられません。そして、さらに続けると、48 日目には $2^{47}≒1.41\times10^{14}$（141,000,000,000,000）円と 140 兆円を上回る額となり、日本の年間の国家予算を超える額になってしまいます。それほど遠くはない何日目かには、世界中の全てのお金を集めても貯金を続けられなくなるという事態に陥るでしょう。

『まえがき』で紹介したガモフの本には、内容的には今と同じですが、次のような話が登場します。王様が家来にあることの褒美として麦をプレゼントしようということになり、その家来の要求するがままに次のように取り決めてしまいます。チェス盤（8×8 の 64 マスある）の 1 番目には 1 粒、2 番目には 2 粒、3 番目には 4 粒、以下 8 粒、16 粒とのせていき、全てのマスを埋め尽くす総数の麦をプレゼントしようということにしました。はたしてその麦の総量はどれくらいになるか、トラック一台分？一教室一杯分？それとも体育館一杯分？王様が予想できずに安易な約束をしてしまったのは仕方ありません。実は必要とする麦の総量は想像をはるかに超えるものでした。結論は本にありますが、全世界で生産される麦を合わせても 2000 年分を超えるだろうというのです。

§22 で、今の 2^x で表される数がおよそどれくらいになるか、簡単に求められる（ただしその数の桁数）計算法を紹介します。

それでは、この 2^x がいかに大きくなるかを少しでもイメージとしてとらえられるように、次の関数のグラフを考えてみることにします。

$y=2^x$ ・・・ ①

x の値が 0 やマイナスの整数の場合については§22 で説明していますが、有理数、無理数における 2^x の値については本書では触れていません（高校で習う）。

（注：有理数というのは 3/5、－7/4 のように分数で表される数。整数も 4/1 のように分母が 1 の分数と考えられるので有理数。分数で表せない数が無理数。無理数は$\sqrt{2}$ や π などのように無限に不規則に続く少数）

ここでは x が整数のときのグラフ上の点をもとになめらかな曲線で描くことにします。グラ

フの正確さより、いかに大きな値になるかを見るのが目的です。

x	1	2	3	4	5	6	10
y	2	4	8	16	32	64	1024

方眼紙にこのグラフを描いてみましょう。x 軸も y 軸も 1 の目盛りを 1cm とします。x＝4 まではなんとかなりますが、x＝5 で y の値は紙から飛び出てしまうでしょう。x＝10 では 10m を超え（建物の4階くらい）、x＝19 では（原点からたった 19cm いっただけで）富士山をはるかに超えてしまいます（約 5243m）。さらに、x＝44 では、y は太陽よりもっと遠くへ行ってしまいます（太陽までの距離が 1.5 億 km であるのに対して、このときの y は 1.76 億 km）。

今は y が 2^x でしたが、これが 3^x だったり 10^x だったりしたらもっとすごいことになります。このような形をした関数 $y＝a^x$ を指数関数と言います（a を『底（てい）』といい、a は正で 1 でない数とする）。よく「指数関数的な増加」という表現の仕方を耳にしますが、このような意味合いから使われるのです。