§13. P 進法のマジック（我々の世界が八進法だったら）

日常的なところで、十進法以外の〇進法という言い方が登場するのは、コンピュータの世界での二進法、十六進法、そして時間や角度での六十進法あたりでしょうか。コンピュータにおける二進法、十六進法は勿論正しい使われ方をしていますが、時間や角度での六十進法は一般的には通用する言い方になってはいるものの、数学的には問題があります。高校で〇進法を習いますが、日ごろ我々があまりにも十進法に慣れ親しんでいること、そして数学的に問題がある六十進法のせいで、混乱し理解に苦しむことがあります。ここでは、単に〇進法を正しく理解するだけではなく、二進法、三進法をパズルの問題に活用してみます。

『〇進法』を正しく理解するために、十進法、十六進法の話から始めます。まず十進法の意味ですが、十になったら繰り上がるということです。ですから漢字の十に相当する（文字としての）数字はありません。0、1、2、･･･、8、9 ときて、次の数（十）は繰り上がって二桁の数 10 で表します（数字を二個使う）。従って十進法で用いられる数字は 0 から 9 の十個です。次に十六進法ですが、同じように考えれば分かるように、0 から始めて、十六個の数字が必要になります。Windows パソコンの場合でしたら、「アクセサリ」の「計算機」を開いて「表示」の「プログラマ」を選択してください（古い OS の場合は「関数電卓」ということもあります）。0 から 9 までの数字のほかに、A、B、C、D、E、F のキーがあります。十六進法ですから、繰り上がる前に（ひと桁の数を表すのに）十六個の数字が必要になるのです。A は十進法の 10 に B は同じく 11 に、･･･、F は 15 に相当します。

十六進法	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
十進法	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18 …

こうしてみると、時間や角度の六十進法が上の本来的な意味での十進法や十六進法とは異なるものであることが分かると思います。60 秒が 1 分、60 分が 1 時間（1 度）というのは、確かに 60 になったら繰り上がるという意味では六十進法と言えなくもないですが、表記の仕方として繰り上がるのではなく、単位として繰り上がっているのです。

それでは一番登場することが多い二進法で話を進めます。二進法なので 2 で繰り上がる、つまり用いられる数字は 0 と 1 の二つです。

二進法	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	･･･ 10000
十進法	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	･･･ 16

コンピュータではメモリーと言われる記憶装置の素子が電気的にプラスの電圧の状態か 0 の状態かでデータとして記憶されます。プラスの状態を数字の 1 に 0 の状態を数字の 0 に対応させます。今八個の記憶素子があったとします。それぞれの素子は 0 か 1 かの二通りの状態を記憶できるので、全部で何通りの状態を記憶できるかと言うと、2×2×2×･･･×2（2 を八回掛ける）の 256 通りです。ですから八個の 1 あるいは 0 のデータをそのまま八桁の二進法の数とみなせば、この記憶装置に 00000000 から 11111111 の 256 個の数を記憶させられることになります。たとえば二進法で、

01011001 と表わされるデータを例に考えてみます。

記憶素子の桁番号	7	6	5	4	3	2	1	0
データ	0	1	0	1	1	0	0	1
十進法から見た位	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	(128	64	32	16	8	4	2	1)

データ 01011001 は十進法から見ると、2^6(64)の位、2^4(16)の位、2^3(8)の位、2^0(1)の位が1なので、64＋16＋8＋1＝89 ということになります。つまり記憶装置には十進法の 89という数が、二進法の 01011001 という数のデータとして収められていることになります。

二進法の数を十進法の数に変換するには上のやり方で行えばよいということは分かると思す。もっと桁数が大きくなっても同様です。逆に、十進法の数を二進法に変換するには次のように計算すると機械的に簡単にできます。たとえば 53 の場合、

2)53 ・・・ 1←①（ 53 を 2 で割って商が 26 で余りが 1)
2)26 ・・・ 0←②（ 26 を 2 で割って商が 13 で余りが 0)
2)13 ・・・ 1←③（ 13 を 2 で割って商が 6 で余りが 1)
2)6 ・・・ 0←④（ 6 を 2 で割って商が 3 で余りが 0)
2)3 ・・・ 1←⑤（ 3 を 2 で割って商が 1 で余りが 1)
1←⑥

最後の商⑥から順に、⑤、④、③、②、① とたどって、110101 となります。そのように計算で求められるわけは次の通りです。53＜64＝2^6 なので(2^5 から始める)、

53＝2^5×⑥＋2^4×⑤＋2^3×④＋2^2×③＋2^1×②＋2^0×①

だったとします(今から①～⑥を求める)。両辺を 2 で割ると、左辺は商が 26 で**余り 1**

右辺は商が 2^4×⑥＋2^3×⑤＋2^2×④＋2^1×③＋2^0×②で **余り①** 従って、**1＝①**。

商を比べると、

商:26＝2^4×⑥＋2^3×⑤＋2^2×④＋2^1×③＋2^0×②

両辺を 2 で割ると、左辺は商が 13 で**余り 0**。右辺は**余り②**。従って、**0＝②**。

商を比べると、

商:13＝2^3×⑥＋2^2×⑤＋2^1×④＋2^0×③。以下同様に、さらに 2 で割ると、

商:6＝2^2×⑥＋2^1×⑤＋2^0×④。両辺の余りから、**1＝③**。さらに 2 で割ると、、

商:3＝2^1×⑥＋2^0×⑤。余りから、**0＝④**。さらに 2 で割ると

商:**1＝⑥**、余り:**1＝⑤**

分からなくなったら、次のような十進法の数で考えてみると良いでしょう

10)5902 ・・・ 2
10)590 ・・・ 0
10)59 ・・・ 9
5 　　　　5902（10^3×5＋10^2×9＋10^1×0＋10^0×2）

以下しばらくコンピュータ絡みの余談になります。気楽にお読みください。コンピュータでは記憶装置の 1 つの素子に収められるデータ(0 か 1)の容量を 1 ビットと言います。そして 8 ビット(上の例で話した記憶装置の容量)を 1 バイトと言います。1000 バイトが 1k(キロ)バイト(正確には 2^{10} の 1024 バイト、以下同様)、1000k バイトが 1M(メガ)バイト、1000M バイトが 1G(ギガ)バイト、1000G バイトが 1T(テラ)バイトです。最近のコンピュータのメモリ容量がいかに膨大なものであるかが分かります。

次に二進法と十六進法の関係を見てみます。二進表示の 1 バイト(8 ビット)を上位 4 桁と下位 4 桁の二つに分けて考えます。

	＜	上位		＞	│	＜	下位		＞
記憶素子の桁番号	7	6	5	4	│	3	2	1	0
二進表示のデータ	0	1	0	1	│	1	1	1	0
十六進表示			5		│			E	

二進法の四桁は、$2^4=16$ なので、十六進法では一桁に相当します。つまり二進表示の上位四桁、下位四桁がそれぞれ十六進の一桁で表せます。従って 1 バイトを十六進法で表すと、00h～FFh(十六進法の数であることを表すために、普通このように h を付ける)ということになります。上の例では、01011110b(二進表示は b を付ける)＝5Eh です。このように二進法と十六進法は非常に相性が良いです(当然ですが)。ところが十進法と二進法や十六進法とは非常に相性が悪く、特にコンピュータのプログラミングに長く関わった者でも両者の関係をとらえるのに苦労します。もしも哺乳類の両手両足の指の数が 8 本だったら、恐らく十進法でなく八進法が用いられていたのではないでしょうか。そうであれば人類にとってコンピュータはずっと扱いやすかったでしょう。さらに脱線しますが、たとえばプロ野球の 2000 本安打の 2000 は十進法だときれいなきりの良い数(こだわりの数)ですが、八進法だと 3720 という実に半端な数です。十進法に慣れ親しむというのはそういうことなのですね。(余談はここまで)

ご存じの方もいらっしゃるかと思いますが、二進法を用いた「数当てマジック」を紹介します。1～31 のどれか(誕生日)を当てるというものです。二進法をよく理解できている人にはすぐに問題の仕掛けは分かりますが、そうでない人には二進法を理解するのに大いに役立つでしょう。5 枚の紙を用意して(【0】、【1】、【2】、【3】、【4】とする)、下のようにそれぞれの紙に数字を書きます。

【0】 1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29、31

【1】 2、3、6、7、10、11、14、15、18、19、22、23、26、27、30、31

【2】 4、5、6、7、12、13、14、15、20、21、22、23、28、29、30、31

【3】 8、9、10、11、12、13、14、15、24、25、26、27、28、29、30、31

【4】16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31

相手に向かって、「これから見せる紙にあなたの誕生日(1～31)はありますか？」と言って、1 枚ずつ見せます。もし相手が、【0】、【2】、【4】にあると答えたら、「あなたの誕生日は 21 日ですね」と

当てることができます。確かによく見ると、21 は【0】と【2】と【4】に入っています。それを即座に言い当てるというところが“凄い！”のです。

仕掛けは次のようになっています。二進法の数を十進法の 0 から 31 までと合わせて並べると、次のようになります（ただしこのマジックでは 0 は使わない）。

00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
0	1	2	3	4	5	6	7
01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
8	9	10	11	12	13	14	15
10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
16	17	18	19	20	21	22	23
11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
24	25	26	27	28	29	30	31

【0】には、二進法における 2^0（1）の位（一番右の桁）が 1 の 1、3、5、7、9、･･･、31 を書きます。【1】には 2^1 の位（右から二番目の桁）が 1 の 2、3、6、7、10、･･･、31 を書きます。同様に【2】には 2^2 の位が 1、【3】には 2^3 の位が 1、【4】には 2^4 の位が 1、の数をそれぞれ書きます。これら 5 枚の紙を 1 枚ずつ見せて、入っていると答えた紙の先頭の数（1、2、4、8、16 のいくつか）を全部合計すれば答えになります。先程の例 21 の場合、$21＝2^4＋2^2＋2^0$⇒10101 なので、【4】、【2】、【0】に入っています。そして、21 は各カードの先頭の数 16 と 4 と 1 の合計になります。偶然とは言え、二進法の 5 桁の数（00001～11111）がちょうど十進法の 1 から 31 までで、誕生日としてありうる日に合致しているところがマジックらしくなっています。

次に今の二進法による「数当てマジック」と同じ仕掛けを試しに三進法で作ってみました。マジックとして面白みがあるかどうかは皆さんの評価によると思っています。二進法では 1 か 0 を「ある」か「ない」かに対応させて聞けばよかったですが、三進法では三通りあるうちのどれかで聞かなければなりません。それでは説明します。このマジックは 0～26 までの数のどれかを選んでもらい、その数が三枚の紙のどれに書かれているかを三回聞いて当てるというものです。まず、三進法の三桁の数（0～222）を十進法の数と並べて書くと次のようになります。

000	001	002	010	011	012	020	021	022
0	1	2	3	4	5	6	7	8
100	101	102	110	111	112	120	121	122
9	10	11	12	13	14	15	16	17
200	201	202	210	211	212	220	221	222
18	19	20	21	22	23	24	25	26

9 枚の紙を用意して、【0－0】、【0－①】、【0－②】、【1－0】、【1－①】、【1－②】、【2－0】、【2－①】、【2－②】 とします（後で説明するが、6 枚でも可）。そして下に示したように、3^0（1）の位が 0 か 1 か 2 で、それぞれ【0－0】、【0－①】、【0－②】に書きます。同様に、3^1 の位が 0 か 1 か 2 で、そ

れぞれ【1－0】、【1－①】、【1－②】に、3^2の位が0か1か2で、それぞれ【3－0】、【3－①】、【3－②】に書きます。

1回目	【0－0】	0、3、6、9、12、15、18、21、24
	【0－①】	1、4、7、10、13、16、19、22、25
	【0－②】	2、5、8、11、14、17、20、23、26
2回目	【1－0】	0、1、2、9、10、11、18、19、20
	【1－①】	3、4、5、12、13、14、21、22、23
	【1－②】	6、7、8、15、16、17、24、25、26
3回目	【2－0】	0、1、2、3、4、5、6、7、8
	【2－①】	9、10、11、12、13、14、15、16、17
	【2－②】	18、19、20、21、22、23、24、25、26

例えば相手が19を選んだとすると、$19=3^2\times2+3^1\times0+3^0\times1$ なので、【0－①】、【1－0】、【2－②】に入ります。そして、19はこの三枚の紙の先頭の数の合計になります（19＝18＋0＋1）。つまり、紙を3枚ずつ3回見せて、入っている紙の先頭の数を合計すれば答えが求められるということになります。お気付きかも知れませんが、先頭が 0 の【0－0】、【1－0】、【2－0】は合計に影響しないので、無くてもよいのです。ということは、1回目は【0－①】、【0－②】の2枚を見せて、どちらに入っているか、あるいはどちらにも入っていないかという聞き方でも良いわけです。2 回目、3 回目についても同様です。というわけで、用意する紙は6枚でもOKです。面白いかどうか分かりませんが、6枚全てを見せて、どれに入っているか（入っている紙全て）を答えてもらうというやり方もできます。

上の二つのマジックは、二進法、三進法の数の話を十進法の数で表しているために少々不思議で分かり難いことになっていますが、二進法で暮らす世界の人に二進法のまま、三進法の世界で暮らす人に三進法のまま出題したら、マジックにも何にもなりません（二進法の世界に暮らす人は 0と1、三進法の世界に暮らす人は0と1と2しか使えないことに注意）。十進法の世界に暮らす人に試しに十進法で出してみますので、そのマジックにならないという訳を考えて見て下さい。

0から99まで数を一つ選んでください。その数はどの（ ）に入っていますか？

1回目	1－0	（ 0、10、20、30、40、50、60、70、80、90）	1の位が0
	1－①	（ 1、11、21、31、41、51、61、71、81、91）	1の位が1
	1－②	（ 2、12、22、32、42、52、62、72、82、92）	1の位が2
	・・・		
	1－⑨	（ 9、19、29、39、49、59、69、79、89、99）	1の位が9
2回目	2－0	（ 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 ）	10の位が0
	2－①	（ 10、11、12、13、14、15、16、17、18、19）	10の位が1
	2－②	（ 20、21、22、23、24、25、26、27、28、29）	10の位が2
	・・・		
	2－⑨	（ 90、91、92、93、94、95、96、97、98、99）	10の位が9

1回目に②と答え、2回目に⑨と答えれば、誰にでもすぐに92と分かってしまいます。

さて、今度はある新聞の教育欄にあった小学生向けの問題ですが、あることが気になったので調べてみました。次のような問題です。

図のように 0、1、2 の三つの数（元の問題では、赤、青、黄の三つの箱）がこの順番に繰り返しながら階段状（元の問題ではピラミッド状）に並んでいます。 上から○段目の左から○番目は何になるでしょう。

0
1 2
0 1 2
0 1 2 0
1 2 0 1 2
0 1 2 0 1 2
・・・

という問題です。ここでは、問題から離れて、右端に並ぶ数に注目してみます。0 と 2 が規則的に繰り返し、1 が現れません（この規則性が見て取れるから小学生にも解けるわけですが）。

十進法の数で同じことをする（1 から始めて一の位の数だけを並べる）と次のようになります。右端の数は不規則に並びます。右側でやっているように、上から n 段目までの表れた数の総数を計算すると、当然ですがその一の位の数が格段の右端の数と一致します。

	n 段目の数の個数	n 段目までの数の総数＜n(n+1)/2 で計算＞
1	1	1
2 3	2	3
4 5 6	3	6
7 8 9 0	4	10
1 2 3 4 5	5	15
6 7 8 9 0 1	6	21
2 3 4 5 6 7 8	7	28
9 0 1 2 3 4 5 6	8	36
7 8 9 0 1 2 3 4 5	9	45
6 7 8 9 0 1 2 3 4 5	10	55

・・・

これを三進法の数で並べてみます。三進法ですから用いる数は 0、1、2 です。

	n 段目	n(n+1)/2	
1	1	1	=3*0+1
2 0	2	3	=3*1+0
1 2 0	3	6	=3*2+0
1 2 0 1	4	10	=3*3+1

２ ０ １ ２ ０	5	15	=3*5+0
１ ２ ０ １ ２ ０	6	21	=3*7+0
１ ２ ０ １ ２ ０ １	7	28	=3*9+1
２ ０ １ ２ ０ １ ２ ０	8	36	=3*12+0
１ ２ ０ １ ２ ０ １ ２ ０	9	45	=3*15+0
１ ２ ０ １ ２ ０ １ ２ ０ １	10	55	=3*18+1

・・・

このように、三進法の数（ただし一の位の数）を並べると、右端の数に規則性が生じます。そして n が３の倍数および３の倍数－１のときは０になり、３の倍数＋１のときは１になっているようです。このことは、次のようにすれば、一般的に成り立つことを示すことが出来ます。

ｉ）$n=3k$ のとき

$n(n+1)/2=3k(3k+1)/2$　$3k$ と $3k+1$ は連続する整数だからどちらかが偶数。従って $3k(3k+1)/2$ は整数であり（このことは下の場合においても同様）、また３の倍数だから、３で割った余りは 0。

ⅱ）$n=3k+1$ のとき

$n(n+1)/2=(3k+1)(3k+2)/2$　$(9k^2+9k+2)/2=9k(k+1)/2+2/2$　よって、３で割った余りは 1。

ⅲ）$n=3k-1$ のとき（$n=3k+2$ としても同じようにできる）

$n(n+1)/2=(3k-1)3k/2$　よって、３で割った余りは 0。

以上から、上で見たような規則性が確認できます。本当は三進法でピラミッド状態を表したので、すべて三進法で解決すれば良いのですが（段数も総和も）、残念ながら我々は三進法での掛け算や割り算に慣れていないので（出来ないという意味ではない！）、十進法で済ませました。