§12. 小学生も習う数学の基本（まずは集合論）

ここでは集合に関して知っておきたいことを手短かにまとめます。とりあえずはこれくらいのことを知っておけばいいでしょうということで。

『ものの集まりであって、対象となり得る全てのものに対して、その集まりに入るか入らないかが数学的にあるいは常識的にはっきりしているとき、その集まりを集合という。また集合に含まれるものを「要素」とか「元」という言い方をする』

例えば、我が国の 47 都道府県を対象とするとき、
「人口が多い都道府県」は集合とは言えません。
「人口が 500 万人以上の都道府県」は集合になり得ます。そのときの要素は「東京都」、「神奈川県」、・・・です。

数学における集合の例およびその表し方の例を示します。集合に含まれる要素の数が少ない場合は、全てを{ }で示すのが分かりやすいですが、たくさんある場合や無限にある場合は表現のし方を工夫して表します。また、集合そのものは次の例のように大文字のアルファベットで表します。

U＝{1 から 15 までの整数}
　＝{1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15}
　＝{x｜x:整数、1≦x≦15}
A＝{1 から 15 までの間の偶数}
　＝{2、4、6、8、10、12、14}
　＝{x｜x＝2n、n は整数で 1≦n≦7}
　＝{2x｜x:整数、1≦x≦7}
N＝{自然数}
　＝{1、2、3、4、5、・・・}
（平面上の点 P で）
C＝{P｜定点 O に対して、OP＝r（r＞0）}
　＝{定点 O からの距離が r である点}（点 O を中心とし半径 r の円周上の点）
X＝{x｜（x＋1）（x－3）≦0}
　＝{x｜－1≦x≦3}

また、x が集合 X の要素であるとき、
x∈X
のように表します。x が集合 X の要素でないと言いたいときは「∈」に斜線を入れます。

＜部分集合＞

二つの集合 A、B において、A⊆B とは、A に含まれる全ての要素が B に含まれることを意味します。そしてこの場合 A は B の『部分集合』という言い方をします。A が B の部分集合であることを証明するには、

$x \in A \Rightarrow x \in B$　（集合 A に入っている任意の要素が集合 B に入る）
が成り立つことを示します。

例】二つの集合 A、B を
A={1 から 100 までの全ての偶数}
B={1 から 100 までの全ての 4 の倍数}
とするとき、$B \subseteq A$ ですが、このことを示せと言われたら次のようにします。
$x \in B$ とする。すると、x は次のように表せます。
$x=4n\ (1 \leqq n \leqq 25)$
$=2 \cdot 2n\ (2 \leqq 2n \leqq 50) \in A$
よって、$x \in B$ なら $x \in A$ が言えたから、$B \subseteq A$。

$A \subseteq B$、$B \subseteq A$ が成り立つとき、二つの集合は等しいと言って A=B で表します。
$A \subseteq B$ でない（つまり A が B の部分集合ではない）ことを言うには、A の要素でありながら B には含まれないようなものを一つあげればよいです。いくつもあげられるときでも一つあげれば十分です。上の例】において、
$2 \in A$ ですが、2 は集合 B には入らない。
従って A は B の部分集合ではない。
（このような例を反例という）

＜全体集合、補集合、空集合＞

一般に集合を考えるとき、対象とする要素の全体を明らかにしておく必要があります。例えば、単に集合 A＝{1、2、3、4、5}としたき、対象としている要素の全体は 1 から 10 までの整数なのか、自然数全体なのか、それとも全ての整数なのか、はっきりさせておく必要があります。対象とする要素全体の集合を『全体集合』と言います。記号は U で表すのが一般的です。（注：全体集合は暗黙の了解のもとに明示しなかったり意識しなかったりすることもある）

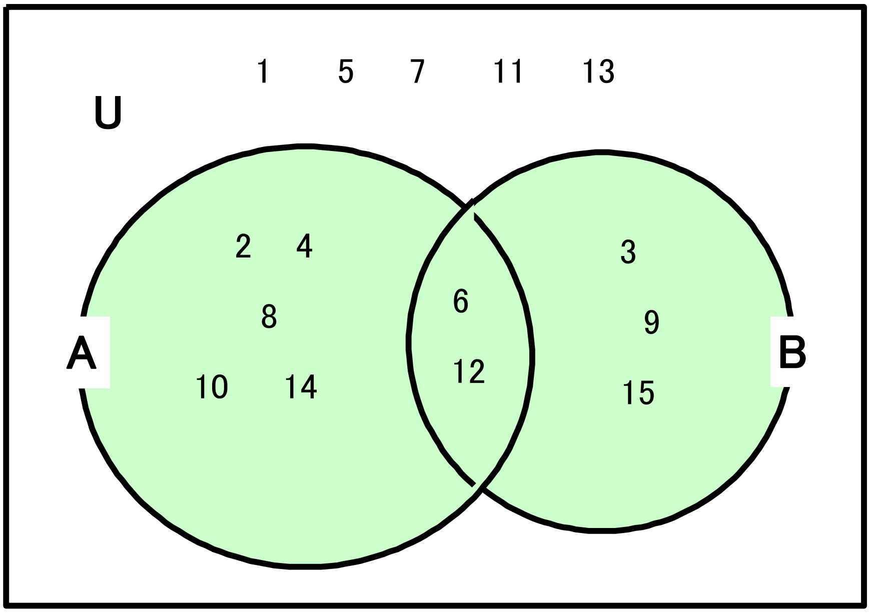
全体集合の要素で集合 A に含まれない要素の集まりを A の『補集合』と言って、A の上にバーを付けて $\overline{A}$ と表すことが多いです（A^C と表すこともある）。

要素を一つも含まない集合（要素が無いのに集まりというのは変ですが、便宜上約束する必要あり）を『空集合』と言って、ϕ で表します。全体集合を U とするとき、
$\overline{U} = \phi$
です。

＜和集合（∪）、積集合（∩）＞

二つの集合 A、B において、どちらにも含まれる要素の全体を積集合と言って、$A \cap B$ で表します。記号が帽子のように見えることから、『A キャップ B』という読み方をよくします。

また、集合 A または集合 B に含まれる要素の全体（数学の『または』なので、A、B どちらにも入る要素も含む）を和集合と言って、$A \cup B$ で表します。同じく記号の形から『A カップ B』という読み方をよくします。



上に示した図は集合とその要素を分かりやすく示したものですが、このような図をベン図と言います。全体集合 U は

$U=\{x \mid x$ は整数、$1 \leqq x \leqq 15\}$

で、二つの集合 A、B は

$A=\{2$ 以上 14 以下の 2 の倍数$\}=\{2x \mid x$ は整数、$1 \leqq x \leqq 7\}$

$B=\{3$ 以上 15 以下の 3 の倍数$\}=\{3x \mid x$ は整数、$1 \leqq x \leqq 5\}$

です。図から分かるように、

$A \cap B=\{6、12\}$

$A \cup B=\{2、3、4、6、8、9、10、12、14、15\}$

＜集合の要素の数＞

集合 A に含まれる要素の数は、普通 $n(A)$ で表します。上の例では $n(U)=15$、$n(A)=7$、$n(B)=5$ で、$n(A \cap B)=2$、$n(A \cup B)=10$ ですが、図から

$\mathbf{n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)}$

であることが分かります。（$n(A)+n(B)$ で $n(A \cap B)$ を二回足しているから）

＜命題との関係＞

全体集合 U を $U=\{1$ から 20 までの整数$\}$として、$A=\{3$ の倍数$\}$、$B=\{6$ の倍数$\}$とすると、$B \subseteq A$ が成り立ちますが、一方『6 の倍数⇒3 の倍数』も成り立ちます。一般に、

条件 p を成り立たせる要素の集合を P、条件 q を成り立たせる要素の集合を Q とすると、

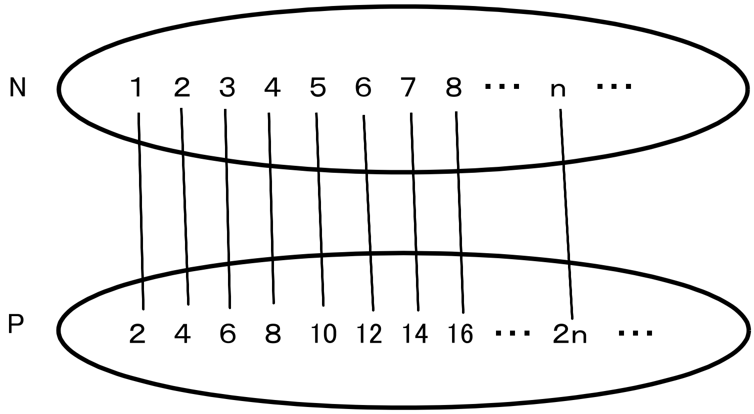
$p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad P \subseteq Q$

という関係が成り立ちます。また§10 にもあったように、$p \Rightarrow q$ が真のときその対偶命題『$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$』は真ですが、このことは集合のベン図でも $\overline{Q} \subseteq \overline{P}$ となっていることが分かります。

＜要素の１対１対応＞

集合Ｎを自然数全体、集合Ｐを正の偶数全体とすると、明らかに$P \subseteq N$であって、$P \neq N$です（１はＮの要素だがＰには入らない←反例。従ってＮはＰの部分集合ではない。このようなときＰはＮの真部分集合という言い方をする）。ところが、$n \in N$とすると、$2n \in P$なので、Ｎのどの要素に対してもそれに対応するＰの要素が存在し、逆に$m \in P$とすると、$m = 2k$（kは正の整数）と書け、そのkは$k \in N$なので、Ｐのどの要素に対してもそれに対応するＮの要素が存在します。つまり、二つの集合ＮとＰは$P \subseteq N$であって、$P \neq N$という関係でありながら、要素は１対１に対応します。要素が無限にある場合にはこのようなことが起こりえます。

1対1対応



上のような対応を考えれば、二つの集合の要素が
1対1に対応することが分かる

＜知っておきたい法則＞

・分配法則

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

・ドモルガンの法則

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

いずれもベン図を用いれば成り立つことが確かめられるでしょう。