§11. 数学的な思考で論理的に解く（3×3 魔方陣）

3×3 の魔方陣というのは、縦 3 個、横 3 個からなる正方形の 9 個のマスを、1 から 9 までの 9 個の整数を一回ずつ使って、全ての縦、横、斜めの三つの数の足し算が同じ値になるように埋めるというものです。やってみると分かりますが、それほど大変な思いをしなくても短時間でできます。暗算を苦にしない小学生ならやはり簡単に「出来た！」となるでしょう。

そういう大したことのない問題を何故わざわざとりあげたかというと、実はあることを念頭に取り掛かると、そう簡単ではない問題であることが分かるからです。しかもそこで用いられる考え方が、非常に数学的なのです。つまり数学的思考のための格好の練習になるのです。

それではさっそく始めます。

まず確認ですが、縦、横、斜めの数の合計は 15 です。これは 1 から 9 までの数の合計が 45 になることから分かります。さて、初めてこの問題に取り組む人は、最初に何を考えるでしょう。9 個のマスで一番特徴的な個所は言うまでもなく中央のマスですが、まずここは何かと考えるのが自然です。このマスの数は一番多く（四回）使われます。としたら、ここに 1 とか 9 はまずきそうにない、直感的に 1 から 9 の中央値 5 がふさわしいのではなかろうか、と考えるでしょう。結論からいって 5 で正解です。そこで問題です。

『中央に入れるべき数が 5 であるわけを説明しなさい』

この『説明』（証明と言ってもいいが、あまり堅苦しくならずに）とは、だれをも納得させられる言い方ができたら正解とします。以下の解説を読む前に是非とも考えてみることをお勧めします。数学に慣れた人ならともかく、そうでなければそれほど簡単ではないでしょう。

中央が 5 であることを直接的に示すことはなかなかうまくいきません。そこで威力を発揮するのが§10 の背理法です。中央が 5 でないと仮定してみます（そこから矛盾や不合理が生じれば、それは仮定が間違いだから。従って結論は中央が 5 である、という論法）。中央が 5 でないとしたら、6 以上か 4 以下です。6 とします（7、8、9 でも同じ説明になる）。中央以外のマスのどこかに 9 が入りますが、9 と 6 が入ったラインはその二つですでに 15 なので不可です（7 以上でも同様）。中央が 4 とします。中央以外のどこかに 1 が入りますが、4 と 1 が入ったラインはその二つの和が 5 にしかならないので、そのラインの和は 15 にはなり得ません（3 以下でも同様）。中央は 6 以上としても 4 以下としても不合理となるから 5 であると言えます。

3×3 魔方陣

8	1	6
3	5	7
4	9	2

回転して重なるものや、上下・左右や対角線に関して対称なものは同一視する

中央が 5 であるといえたので、残りの 8 個の数は四つのペアー（9－1、8－2、7－3、

6－4）になって縦、横、斜めに（5 をまたいで）入ることになります。ここまでくれば、試行錯誤で順に入れていけば簡単に答えは見つけられるのですが、ここでも、あえて（数学的な思考の練習のために）論理的な説明を試みることにします。

9 を角に入れたとします（9 は角には入れられないと言いたい）。9 と 1 以外のマスは中央の 5 を含む縦、横のラインともう一つの斜めのラインです。特に注目すべきは斜めのラインです。ここには残る三つのペアー（8－2、7－3、6－4）のいずれかが入りますが、どれを入れたとしてもどちらかの角（図では C1、C2）に 6 以上の数が入ることになってしまいます。従って不可であり、9 と 1 のペアーは斜めには入り得ません。

9	A1	C1
B1	5	B2
C2	A2	1

8 － 2

7 － 3

6 － 4

角に 9 を入れると、
C1かC2のいずれかに6以上の数が入ることになるから不可

結局 9 と 1 のペアーは 5 をまたいで縦か横ですが、縦か横かは魔方陣全体を回転すると一致する関係にあるので本質的な違いはありません。そこで真中の縦のラインに入れることにします。次に 8 と 2 のペアーですが真中の横のラインに入れたとします（ここには入れられないと言いたい）。

A1	9	B1
8	5	2
B2	1	A2

7 － 3

6 － 4

真中の横のラインに 8－2 を入れると、
A1＋B1が 7 以上になるから不可

9の両隣の角（A1、B1）に入る二つの数は、残された2組のペアーの小さい方を入れたとしても3と4で15を超えてしまいます。これで8と2のペアーが斜めに入ることが分かります。残る二組は必然的に入り方が決まります。

以上から、3×3の魔方陣が試行錯誤ではなく、論理的な展開で解決しました。しかも今の流れから分かるように、3×3 の魔方陣は回転したり対称に移動したりして重なるものは本質的に異なるものではないと了解すれば、一通りしかないことが分かります。

なお、上で用いた考え方は全て背理法によるものでしたが、他の示し方も勿論いろいろあるでしょう。是非挑戦してみてください。

それでは背理法用いないで直接的に求める考え方の一例を示します。中央が 5 と決まった次からです。残りの中央をまたぐペアーは上にもあるように、9－1、8－2、7－3、6－4ですが、5との比較で次のように表せます（下の段が5との差）。

5	1	・ 9	2	・ 8	3	・ 7	4	・ 6
0	－4	＋4	－3	＋3	－2	＋2	－1	＋1

下段の＋、－の数は5を0 みなしたときの数です。これらの数で考えると、3×3の魔方陣は、全ての縦、横、斜めの合計が 0 になればよい、ということになります。

下の ±1～±4 の 8 個の数の間に、○＋○＋○＝0 の関係が成り立つ式を考えてみます。中心の 5(0)をまたぐラインの四本は和が 0 であることは明らかなので取り上げません。残るは上下の横のラインと左右の縦のラインの四本です。見易くするために本来不要な括弧を入れてあります。

（＋4）＋（－3）＋（－1）＝0 、（－4）＋（＋3）＋（＋1）＝0

（＋3）＋（－2）＋（－1）＝0 、（－3）＋（＋2）＋（＋1）＝0

の四つです（プラス、マイナスの符号を入れ替えた式も別のものとしている）。±3 と±1は四回ずつ、±4 と±2 は二回ずつ登場します。このことから、8と2のペアーと6と4のペアーは中心をまたがない四つの式に関係し、9と1のペアーと7と3のペアーは同じく二つの式に関係します。このことから8と2のペアーと6と4のペアーが斜めに、9と1のペアーと7と3のペアーが縦、横に入ることが分かります。

A1	B1	C1
D1	5	D2
C2	B2	A2

中心の5をまたがないラインのみ考える。A1は上のライン（横）と左のライン（縦）の二つに関わる。A2も同様に二つに関わる。従って、A1－A2のペアーは四つの式に関わる。C1－C2のペアーも同様。一方、B1は上のラインだけ、B2は下のラインだけ。従って、B1－B2のペアーは二つの式に関わる。D1－D2のペアーも同様。

さて、この後は余談としてですが魔方陣にまつわる興味深い話を紹介します。新聞で報

じられたことなのでご覧になった人もいるかもしれません。2014 年のことです。「高校生がスーパーコンピュータを使って 5×5 魔方陣の全解を求めることに成功」とありました。高一の男子生徒が筑波大学の計算科学研究センターの教授との共同研究を進める中で、5×5 魔方陣の解（解そのもはすでに知られている）をスーパーコンピュータを使って最速の約 2 時間 36 分で求めることに成功したというのです。

以下、同研究センターから Net 上に流布された記事の内容から抜粋したものです。まずは魔方陣に関してですが、解は 4×4 で 880 通り、5×5 で 2 億 7530 万 5224 通りあるそうです（6×6 の解の総数はまだ分かっていない）。高校生は巧みな考え方による計算法（アルゴリズム）を編み出し、教授とスパーコンピュータを効率よく使いこなして成功したようです。記事にはどのような考え方をしたか、コンピュータをどのような使い方をしたかなどにも触れていますが、門外漢にはそのすごさが分かりません。興味のある人はご覧になるとよいでしょう（Net 上ですぐに見つけられます）。

その記事の最後の方にありましたが、6×6 魔方陣へのチャレンジは現時点では不可能と判断しているそうです。現在のプログラムでは 150 兆年、エクサスケール（エクサは、メガ、ギガ、テラ、ペタの次の単位）のスパコンでも 54 万年以上かかると見積もられているとのことです。