§10. これぞ言い回しの妙（背理法）

ここではまず、数学における独特な表現の仕方について確認しましょう。勿論、よく理解できている人はとばしてかまいません（ 6）の前まで）。

1)「または」の意味

たとえば、

『$xy=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$「または」$y=0$』・・・（※1）

このような言い方は数学ではよく出てきます。右側の「または」ですが、この場合の「または」は、日常使われる「または」と意味が異なる場合があります。まず日常的な「または」の使われ方の例をいくつか見ていきます。

『そば屋さんで、かけそば「または」もりそばを食べる』・・・ ①

と言った場合、普通はそのどちらかを食べるという意味で使います。その両方を食べることもその意味の中に含めるということはまずしないでしょう。

『あの病院は、日曜「または」祝祭日は休み』・・・ ②

この場合は、日曜と祝祭日が重なった場合も勿論含みます。

『この遊園地のジェットコースターは、5 歳以下「または」70 歳以上は乗車不可』・・・ ③

この場合は、両方が重なることはないので誤解は起こりません

数学における「または」は①ではなく、②のようなとらえ方をします。従って、（※1）の右側は $x=0$ で $y=0$ である場合も含むと考えます。さらに数学における具体例を挙げます。

『x、y が整数で、$xy=2k$（k は整数） $\Rightarrow$ x が 2 の倍数または y が 2 の倍数』

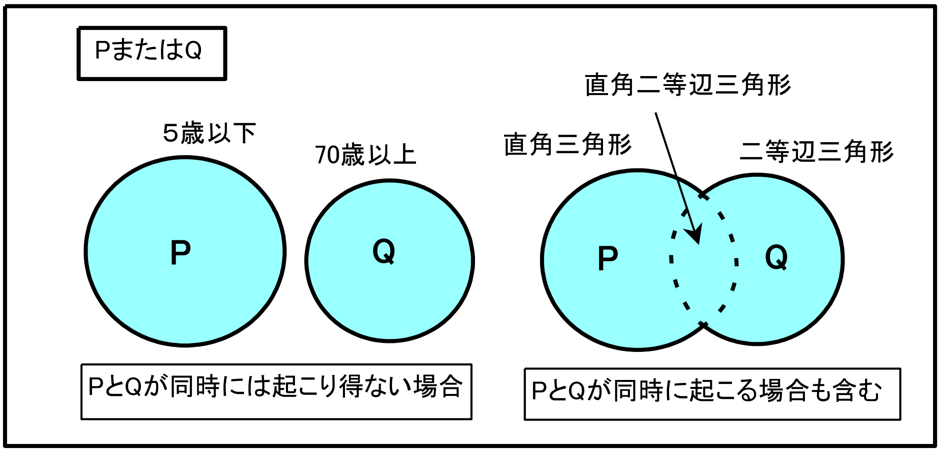
右側は、x、y のどちらも 2 の倍数である場合を含みます。

『△ABC が二等辺三角形または直角三角形であるとき・・・』

△ABC は直角二等辺三角形の場合も含みます。

『二次方程式 $(x-1)(x+2)=$ の解は、$x=1$または $x=-2$（普通は、$x=1、-2$ と書く）』

この場合は、勿論 x の値は同時には起こり得ないので、x が 1 でもあり-2 でもあるということは含まれません。x はどちらかの値をとります。



『ベン図』で示すと図のようになりますが、両者が同時には起こらない場合はともかく、同時に起こり得うる場合、『または』はそれも含むということを確認しましょう。

2)「かつ」の意味

たとえば、

『$x \geqq 0$、$y \geqq 0$ で $x+y=0$ ⇒ $x=0$「かつ」$y=0$』・・・（※2）

右側の「かつ」の意味は日常的に使われる「かつ」と同じです。

3)「または」、「かつ」の否定

（※1）の右側に表れた『$x=0$ または $y=0$』(これを P とする)の否定を考えます。常識的に考えると、

『$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$』・・・（$\overline{P}$）　　（注:条件 P の否定を$\overline{P}$で表す）

ですが、それで正解です。P に、$x=0$、$y=0$ の場合も含めていたので、$\overline{P}$ でよいことが分かります（またはの意味を x だけが 0 か y だけが 0 としていたら、厄介なことになる)。

（※2）の右側に表れた『$x=0$ かつ $y=0$』(これを Q とする)の否定を考えます。x、y ともに 0 の否定ですから、「x が 0 でないか、y が 0 でないか、x、y どちらも 0 でないか」ですが、「または」が都合よく使えます。

『$x \neq 0$ または $y \neq 0$』・・・（$\overline{Q}$）

（P）の否定の（P'）、(Q）の否定の（Q'）をまとめて書くと次のようになります。

『$x=0$ または $y=0$』の否定は『$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$』

（それぞれを否定して、「または」を「かつ」に）

『$x=0$ かつ $y=0$』の否定は『$x \neq 0$ または $y \neq 0$』

（それぞれを否定して、「かつ」を「または」に）

一般的に、「または」、「かつ」の否定はこのように機械的に行うことが出来ます。

4)「少なくとも一つ」の意味およびその否定

たとえば、「a、b、c、d、e の少なくとも一つが 0 でない」という条件があるとき、このことをまともに考えて、a が 0 でないとき、b が 0 でないとき、・・・、e が 0 でないとき、a と b が 0 でないとき、・・・、全部が 0 でないとき、と場合分けしたら大変なことになります。§3 にある、「23 人がいて少なくとも一組の誕生日が重なる」も同様に、一組が重なる場合、二組が重なる場合、・・・、三人が重なる場合、・・・、(非現実的ですが、数学的には 23 人が重なる場合)、と際限の無いことになってしまいます。このような場合は、その否定を考えると一度で済みます。前の例では「a、b、c、d、e すべて 0」、後の例では「23 人の誕生日がことごとく異なる」です。

5)「すべて～ではない」、「すべては～ではない」の意味およびその否定

たとえば、

『a、b、c、d、e は、すべて 0 ではない』

の意味は直ちに分かります（5 個とも 0 でない)。従って、これの否定は、『少なくとも 1 個

は0である』です。次に、微妙に異なる表現ですが、
『a、b、c、d、e は、すべては0ではない』

はどうでしょう。これはすべてが0であることを否定しています。つまり、5個の文字のうち少なくとも1個は0でない、と言っています。従って、これの否定は『5個とも0である』です。

日本語の言い回しは微妙なことがあるので注意が必要です。

6)『背理法』

さて、いよいよ本題です。推理物、探偵物の小説や映画でよく現れる筋書きとして、疑わしい人物のアリバイを立証するという場面が登場します。これがまさしくこれから取り上げる「背理法」を用いています。

ある事件が発生して、犯人が容疑者A、B、C、D、E の5人に絞られたとします。刑事、探偵はどうするか。直接的に犯人を特定するのが困難な場合、5人のうちの容疑の薄い人物から順に消去するという手法を用います。

例えばAは犯人ではないと結論付けたいとき、あえて結論を否定して犯人だとしてみます。そうしてAの犯行時刻におけるアリバイ(犯行現場でない別の場所にいた)を調べます。もしもAのアリバイが成立すれば、犯人としたAが同一時刻に異なる二つの場所に存在したという矛盾が生じます。従ってAは犯人ではないという結論になります。

(注:背理法から少し話がそれますが余談のつもりで。A が犯人だと結論付けたいときにもアリバイは調べるでしょうが、アリバイが成立しないというだけでは勿論犯人だと断定できるわけではありません。やはりアリバイ調べは容疑者リストから除外するためのものと言えるでしょう)

誰にとっても明らかな分かり易い言い回しなので、あまり意識する人はいないと思いますが、これからとりあげる背理法による論法になっています。数学における『背理法』とは、
『(結論として断定したい事柄が直接的には証明しにくいとき)結論を否定することによって何らかの矛盾を導く。矛盾が生じたのは成り立つはずの結論を否定したから。従って結論は成り立つ』

という論法(証明法)です。高校の数学で背理法を用いる例としてよく知られているのは $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明です。$\sqrt{2}$ が無理数でない、即ち有理数だと仮定して矛盾を導き、従って$\sqrt{2}$ は無理数だと主張するものです。

(無理数をまだ習っていない中学生、忘れてしまった大人たちのために・・・。
$\sqrt{2}$ が有理数として$\sqrt{2}=n/m$ と書けたとするする。ただし m、n は整数で
n/m は既約分数であるとする。両辺を二乗すると、$2=n^2/m^2$ 、$n^2=2m^2$ ・・・ⅰ)
n^2は2の倍数だからnは2の倍数(先へいって出てくる『対偶』を用いる)。$n=2k$
(k:整数)とする。ⅰ)へ代入して、$4k^2=2m^2$。よって $m^2=2k^2$。m は2の倍い
数。n、m がともに2の倍数になり、n/m が規約分数であることに矛盾する。よって、
$\sqrt{2}$ は無理数である)

背理法は高校までの数学ではそうそう登場するものではありませんが、もっと高度なより抽象的な数学になるとかなり頻繁に使われます。それでは背理法を用いる例をいくつか示します。

【例 1】直線外の点から直線への垂線は一本のみ引けることを示せ。

証明）

（あまりにも明らか過ぎてどのように言ったらいいか。そこで背理法を用いる）

点から垂線が二本引けたとする。すると三角形が出来るが、低角はどちらも 90°であり、これに頂点における角を足すと三角形の内角の和が 180°を超えてしまうから矛盾。よって、垂線は一本しか引けない。

【例 2】a＋b＋c＝0 で、a、b、c のすべては 0 ではないとき、a、b、c の少なくとも一つは負の数であることを示せ。

証明）

（「a、b、c の少なくとも一つは負の数」を否定して）

a、b、c がすべて 0 以上の数とする。ただし三つとも同時に 0 であることはない。すると、a＋b＋c＞0 。これは a＋b＋c＝0 に反する。よって結論が成り立つ。

【例 3】サイコロを三回振って目の和が 13 であった。少なくとも一回は目が 5 か 6 であったことを示せ。

証明）

三回とも目が 5 でも 6 でもなかったとする。すると、三回とも目は 4 以下であり、合計は 12 以下になり矛盾。従って、少なくとも一回は目が 5 か 6 であった。

【例 4】§11. で、3×3 の魔方陣の中心が 5 であることを、背理法で導いています。

【例 5】§21. で、$\vec{p}$、$\vec{q}$ が一次独立のとき、

『 $m\vec{p}+n\vec{q}=\vec{0} \Leftrightarrow m=0, n=0$ 』

の証明で背理法を用います（右から左は明らか）。

左⇒右）m≠0 とすると、$\vec{p}=-n/m\vec{q}$ と表せることになり、両ベクトルが一次独立でなくなる。よって m＝0。これから n＝0 も言える。

【例 6】§2. で背理法的な考え方を使っています。

対偶）

命題『 P ⇒ Q である 』に対して、命題『$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ 』を元の命題の『対偶』といいます。対偶の対偶は元の命題になります。

元の命題が真のとき、その対偶命題は真になります。したがって、対偶が正しければ、元の命題は正しいです。

たとえば、

『 ロケットの打ち上げに失敗したのは、設計上のミスがあったから』

と、

『設計上のミスがなければ、ロケットの打ち上げは成功していた』

は互いに対偶の関係にありますが、どちらかが正しければもう一方も正しいです。このよ

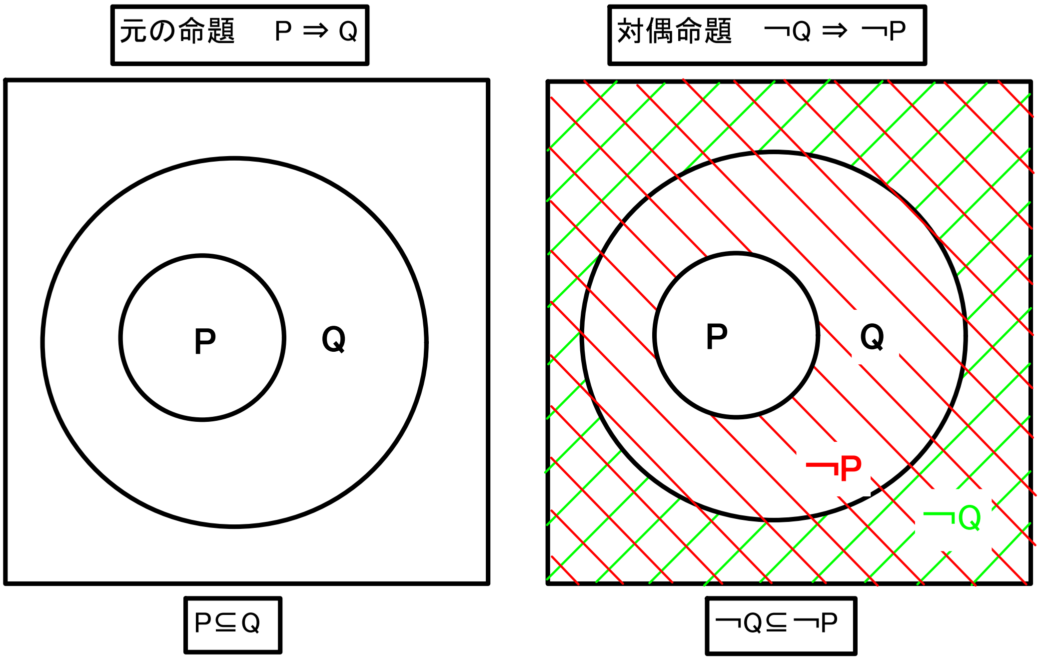
うにあることを主張するのに、あえて対偶の言い方をすることは誰しも日常よくやることです。

『買い物が出来なかったのは、財布を落としたから』と『財布を落とさなければ、買い物は出来た』。

ある命題を証明するのに、仮定から直接的に結論を導きにくいとき、対偶の証明が効果的なことがあります。たとえば、

n が自然数のとき、『n^2 が偶数なら、n は偶数』は当たり前のようですが、どうして？と聞かれるとちょっと説明しにくいです。でもその対偶『n が奇数なら、n^2 は奇数』なら簡単に示せます。

下の図は、ベン図を用いて元の命題と対偶命題の関係を示したものです。下の図では P の否定を¬P で表しています。



元の命題が真ならば対偶命題も真、対偶命題が真ならば元の命題も真

【例 7】二つの正の整数 m と n があって、和が偶数のとき、m、n はともに偶数かともに奇数である。

証）

m が偶数で n が奇数とする。k_1、k_2 を整数として、$m=2k_1$、$n=2k_2+1$ と書ける。このとき、

$$m+n=2(k_1+k_2)+1$$

となるから、奇数である。よって対偶が成り立つから、元の命題は正しい。

　対偶を用いる証明は結論の否定から仮定の否定を導きますが、一方背理法は結論を否定して何らかの矛盾を導きます。その矛盾が仮定が成り立たなくなるという矛盾ならそれは対偶を示したことになります。したがって対偶を用いる証明は、背理法に含まれると言えます。